成長・生残モデルにおける最適制御理論

誌名	中央水産研究所研究報告
ISSN	09158014
著者名	赤嶺,達郎
発行元	水産庁中央水産研究所
巻/号	10号
掲載ページ	p. 135-167
発行年月	1997年3月

中央水研研報　第10号　135～167頁　平成９年３月
Bull. Natl. Res. Inst. Fish. Sci., No.10, 135～167, Mar. 1997

総説

成長・生残モデルにおける最適制御理論

赤 嶺 達 郎*

Optimum Control Theory for the Dynamic Pool Model

Tatsuro Akamine*

Abstract：The applications of Pontyagin's maximum principle and the calculus of variations for Beverton and Holt's dynamic pool model are discussed. For this continuous model using mortality coefficients, solutions of these optimum methods are generalizations of the yield isopleth diagram which is Beverton and Holt's graphical method. The discrete maximum principle and the linear programing for the discrete model using mortality rates are also discussed. Because mortality always occurs intermittently and not continuously, the discrete model is better than the continuous one. For an exact expression of the continuous model, mortality coefficients must be linear combinations of Dirac's delta functions. The linear programing or the simple differentiation is enough for the optimization in the discrete model in which there may be singular solutions.

1996年９月６日受理　中央水産研究所業績Ａ第60号

* 中央水産研究所(National Research Institute of Fisheries Science, Fukuura, Kanazawa, Yokohama 236, Japan)

ポントリャーギンの最大原理（以下，最大原理と略す）をはじめとする最適化手法は，工学や経済学のみならず数理生態学にも広く応用され，多くの成果が得られている(巌佐,1981,1990；Kitahara *et al.*,1987；Hiyama *et al.*,1988；Hiyama and Kitahara,1993)。水産資源解析学に本格的に最適化手法を導入したのはClark(1976)が最初であるが，それが日本の研究者にいかに大きな衝撃を与えたかは，Clark(1985)の訳本の「編集者あとがき」より容易に推察できる。おそらくBeverton and Holt(1957)以来，最大の衝撃であっただろう。後者は既に40年を経過し「成長・生残モデル」として資源解析学の中心モデルとして普及しているが，前者は20年を経過しその重要性が認識されているにもかかわらず，ほとんど普及していないように思われる。おそらく普及を妨げている最大の要因は，最適化手法を理解する上での数学的な難しさだろう。

ここでは成長・生残モデルにおける最大原理を中心とした最適化手法の適用について検討を行う。これはClark(1976)とGoh(1980)によって完全に定式化されたが，Akamine(1996a,1997)および赤嶺(1996b)によって別な視点から再検討されている。この総説によって最大原理に対する理解が深まり，その他のモデルや最適化手法についても理解や応用が容易になるだろう。なお最大原理の難しさの要因のひとつに変数や添字の多さと，各教科書における記号の不統一性があげられる。そこで最大原理についての簡単な解説を，記号の統一性を重視して付録にまとめたので参照されたい。これは主として加藤(1988)および篠崎ら(1991)を参考にしたものである。最大原理は水産資源解析以外にも広く適用されており，今後ますます重要視されていくものと期待される。

本論に先立ち，校閲していただいた日本海区水産研究所の檜山義明主任研究官に深く感謝申し上げます。

成長・生残モデル

水産資源解析学の中心的モデルは余剰生産量モデルと成長・生残モデルの２つである。Clark(1976)はその両者について最適化手法を適用しているが，ここでは後者についてのみ検討する。それは前者は経済学的モデルの色合いが強いのに対し，後者は生物学的モデルの色合いが強いためと，Clark(1976)の適用では後者の方により問題点があると考えるからである。ここでは基本であるBeverton and Holt(1957)の成長・生残モデルについてAkamine(1996a)とGoh(1980)の最適化を解説し，後述のClark(1976)のモデルの基礎とする。

成長・生残モデルでは単一コホート(年級群)から最大漁獲重量を得るための漁獲方法を検討する。資源尾数を$N(t)$，１尾あたりの平均体重を$W(t)$，漁獲死亡係数と自然死亡係数をそれぞれ$F(t)$と$M(t)$とする。目的関数である総漁獲重量は

$$Y = \int_0^T F(t)N(t)W(t)\mathrm{d}t = \int_0^T F(t)B(t)\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

となるが，これを最大にする関数$F(t)$を求める問題である。ここで$B = NW$はバイオマス(生物重量)を意味している。水産資源解析学では資源尾数は通常，

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\{F(t)+M(t)\}N(t) \tag{1.2}$$

という微分方程式に従って減少すると仮定している。これは指数関数の定義式そのもので，初期条件を$N(0) = N_0$として機械的に解くと，

$$N(t) = N_0 \exp[-\int_0^t \{F(u)+M(u)\}\mathrm{d}u] \tag{1.3}$$

という解が得られる。ここで

$$f(t) = \int_0^t F(u)\mathrm{d}u, \quad m(t) = \int_0^t M(u)\mathrm{d}u \tag{1.4}$$

とおくと，

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{e}^{-m(t)} \tag{1.5}$$

となる。このように漁獲死亡と自然死亡を積の形に分離できるのが連続モデルの特徴である。後述の離散モデルではこのような形には分離できないため，連続モデルよりも扱いにくい面がある。

インパルス制御　ここでAkamine(1996a)に従い$f(T) = A =$ 定数,$B^*(t) = N_0 \mathrm{e}^{-m(t)}W(t)$とおこう。$B^*$は漁獲がない自然状態におけるバイオマスである。これより(1.1)式は$F = f'$だから，

$$Y = \int_0^T f'\mathrm{e}^{-f}B^*\mathrm{d}t \tag{1.6}$$

と表せる。$(\mathrm{e}^{-f})' = -f'\mathrm{e}^{-f}$に注目して上式を部分積分すると，

$$Y = \int_0^T \mathrm{e}^{-f}B^{*\prime}\mathrm{d}t - [\mathrm{e}^{-f(t)}B^*(t)]_0^T \tag{1.7}$$

となる。右辺第2項は定数だから，第1項の積分を最大化することだけを考えればよい。

ここで制御変数を$u = \mathrm{e}^{-f} > 0$とし，不等式拘束条件

$$u^{\min} \leqq u \leqq u^{\max} \tag{1.8}$$

を考慮する。B^*が一般の関数の場合には，最適制御は積分の意味を考えれば明らかに，

$$u^{\circ} = \begin{cases} u^{\max} & (B^{*\prime} > 0 \text{ のとき}) \\ u^{\min} & (B^{*\prime} < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.9}$$

で与えられる。(1.9)式のような関数を切り替え関数(switching function)と呼び，このような制御をバンバン(bang－bang)制御と呼ぶ。変分法では連続関数しか扱えないが，不等式拘束条件がある問題ではこのような不連続な解が得られることが多く，最大原理の大きな特徴である。ここには状態変数も随伴変数も現れていないが，これが最大原理の原型であることは容易に理解できるだろう。最大原理は状態変数の影響を随伴変数で打ち消し，ここに示したような

単純な制御問題に還元してしまう方法であると解釈できる。

(1.4)式より$f(t)$は単調増加関数なので，$u(t)$は単調減少関数となる。したがって一般の関数B^*に対しては(1.9)式のようなバンバン制御は実行できない。しかし水産資源解析学において一般的に$W(t)$は単調増加関数であるが頭打ちとなり，$e^{-m(t)}$は単調減少関数なので，$B^*(t)$は単峰型の関数となることが多い。ここでは

$$B^{*\prime}(t)\quad \begin{cases} >0 & (t<s\text{ のとき}) \\ =0 & (t=s\text{ のとき}) \\ <0 & (s<t\text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.10}$$

という単峰型の関数だけを扱うことにする。実際にBeverton and Holt(1957)，Clark(1976)およびGoh(1980)ではそのような場合しか扱っていない。$F\equiv 0$のとき$B^*=NW$，$N'=-MN$なので

$$B^{*\prime}=(NW)'=N'W+NW'=-MNW+NW'=B^*(W'/W-M) \tag{1.11}$$

となる。制御を考察する範囲において一般に$W'/W=(\ln W)'$は単調減少関数であり，$t=s$のとき$M=W'/W$となるが，この関係式は次章で用いる。

このとき$0<e^{-A}\leqq u\leqq e^{0}=1$であるから，最適制御は，

$$u^{\circ}=\begin{cases} 1 & (t<s\text{ のとき}) \\ e^{-A} & (s<t\text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.12}$$

となる。これを(1.7)式に代入すると，

$$\begin{aligned} Y^{\max} &= \int_0^s B^{*\prime}dt+\int_s^T e^{-A}B^{*\prime}dt-\left[e^{-f(t)}B^*(t)\right]_0^T \\ &= (1-e^{-A})B^*(s) \end{aligned} \tag{1.13}$$

を得る。これより$A=\infty$のときだけ，$Y^{\max}=B^*(s)$となることがわかる。

以上の結果はB^*の最大値$B^*(s)$において瞬間的な漁獲を行うことを意味している。漁獲死亡係数$F(t)$で表現してみると，超関数であるディラックのデルタ関数

$$\delta(t-s)=\begin{cases} 0 & (t\neq s\text{ のとき}) \\ \infty & (t=s\text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-s)dt=1 \tag{1.15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t-s)dt=f(s) \tag{1.16}$$

を用いて，

$$F(t)=A\,\delta(t-s) \tag{1.17}$$

のように表すことができる。このような制御を「インパルス制御」と呼ぶ。デルタ関数は正規分布$N(\mu, \sigma^2)$の極限($\sigma^2 \to 0$)と解釈される場合もあるが，この場合にはむしろ矩形関数

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0,\ h < t) \\ 1/h & (0 \leqq t \leqq h) \end{cases} \tag{1.18}$$

の極限($h \to 0$)と解釈すべきだろう。実際に$F(t) = Ar(t)$としてYを計算し，極限をとれば(1.13)式を得ることができる。超関数は通常の関数とはまったく異なるので，積分も上記のように定義して与えなくてはならないが，決して難しい概念ではない。

この結果は我々の常識と一致するもので，既にBeverton and Holt(1957)の等漁獲量曲線図のFIG.17.14に示されている(この図はClark(1985)のFIGURE 3.19にも引用されている)。その図において右端の極限値$F = \infty$の部分がインパルス制御を意味しており，その右端の頂上の縦軸の値がここで求めた最大値をあたえる時点sである。ただし最大漁獲量を得るためには瞬間の漁獲($F = \infty$)だけでは不十分で，さらに$A = \infty$でなくてはならない。このような漁獲は一般の漁業では不可能に近いが，水槽飼育や生け簀養殖の場合にはそれほど困難ではない。一網打尽にすればよいだけである。漁獲方程式はこのような場合にも適用されるべきであるから，デルタ関数は一般教養的知識として不可欠である。もっとも死亡係数Fで考えるから難しいのであって，死亡率で考えれば$E = 1$となるだけである。

ここで得られた最適解は$F = \infty$であり，Fに何の制限も加えていないから変分法の解と解釈できる。実際，Clark(1976)は後述のようにより複雑なモデルにおいて変分法の解を求め，その極限として同一の解を導いている(ただしデルタ関数には言及していない)。しかし一般の漁業においては，Fの上限値を設定する方が現実的だろう。そこで

$$0 \leqq F \leqq F^{\max} < \infty \tag{1.19}$$

という拘束条件を考慮することになるが，その場合には次節のように最大原理が必要となる。なおこの節で示したように，制御変数の取り方によって手法が変分法となったり最大原理となることがある。

最大原理の応用　連続モデルにおいては前節の制御変数$u = \mathrm{e}^{-f}$を状態変数とおいても最大原理を適用できるが(Akamine,1996a)，ここでは第3章の離散モデルと比較検討するため，Clark(1976)に従って状態変数を設定する。(1.1)式を目的関数，(1.2)式を拘束条件とし，状態変数をN，制御変数をFとする。これよりハミルトン関数は

$$\begin{aligned} H &= FNW - \lambda(F + M)N \\ &= \{(W - \lambda)F - \lambda M\}N \end{aligned} \tag{1.20}$$

とおける。右辺第2項はFと無関係だから，Fの最適制御は任意の時点tにおいてHを最大にする

$$F^{\circ} = \begin{cases} F^{\max} & (W > \lambda \text{のとき}) \\ 0 & (W < \lambda \text{のとき}) \end{cases} \tag{1.21}$$

で与えられる。なお特異解は前節で示した変分法の解($F = \infty$)であるから，このモデルにおいて$W = \lambda$を満たす特異解は存在しない。

次に随伴変数λを具体的に求めてみよう。随伴方程式は

$$\lambda' = -\partial H / \partial N = (F + M)\lambda - FW \tag{1.22}$$

である。また境界条件を考慮すると$N(0) = N_0$は固定端，$N(T) =$ 不定は自由端だから，

$$\lambda(T) = 0 \tag{1.23}$$

だけである。(1.22)式は1階線型微分方程式だから，「定数変化法」という常法で解ける。まず右辺第2項の定数を0とおいて

$$\lambda' = (F + M)\lambda \tag{1.24}$$

を解く。これは変数分離型なので簡単に解けて，

$$\lambda(t) = c\exp\{\int_0^t (F + M)\mathrm{d}u\} \tag{1.25}$$

という解を得る。cは積分定数であるが，これをtの関数$c(t)$と変化させて(1.22)式の解を求めるのである(名前の由来)。(1.25)式を(1.22)式に代入すると，

$$c' = -FW\exp\{-\int_0^t (F + M)\mathrm{d}u\} \tag{1.26}$$

という微分方程式を得る。$\lambda(T) = 0$より$c(T) = 0$となるから，

$$c(t) = \int_t^T F(v)W(v)\exp\{-\int_0^v (F + M)\mathrm{d}u\}\mathrm{d}v \tag{1.27}$$

という解を得る。これを(1.25)式に代入すると，

$$\lambda(t) = \int_t^T F(v)W(v)\exp\{-\int_t^v (F + M)\mathrm{d}u\}\mathrm{d}v \tag{1.28}$$

または

$$\lambda(t) = I(t)/N(t) \tag{1.29}$$

という解が求まる。ここで$I(t) = N_0 c(t)$，$N(t)$は(1.3)式の$N(t)$である。これが求めていたものである。(1.29)式を(1.21)式に代入すると，$B(t) = N(t)W(t)$とおいて，

$$F^{\circ} = \begin{cases} F^{\max} & (B > I \text{ のとき}) \\ 0 & (B < I \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.30}$$

となる。$B(t)$はその時点における漁獲がある場合のバイオマス，$I(t)$はその時点以降の総漁獲重量を表している。次章で紹介するようにClark(1976)は初歩的な方法でこの関係式を求めている。随伴方程式を最初に厳密に解いたのはGoh(1980)である。

この解を(1.10)式の単峰型の場合に適用すると，$0 < p < s$において$B(p) = I(p)$となる時点pが唯一存在するので，

$$F^{\circ} = \begin{cases} 0 & (t < p \text{ のとき}) \\ F^{\max} & (p < t \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.31}$$

という制御方法を得る。これより(1.30)式はBeverton and Holt(1957)理論の一般化であることがわかる。もっとも(1.31)式自体は，F = 定数として

$$I(p) = \int_p^T FNW\mathrm{d}t$$

$$= FN_0\mathrm{e}^{(F+M)p}\int_p^T \mathrm{e}^{-(F+M)t}W(t)\mathrm{d}t \tag{1.32}$$

をpで微分して0とおけば，$I(p) = N(p)W(p) = B(p)$となるので，最大原理を使わなくても得ることができる。次章で紹介するClark(1976)の初歩的な方法はこれと同一である。ここで得られた結果はBeverton and Holt(1957)の等漁獲量曲線図(FIG.17.14)において，任意の縦軸上における最大点の縦軸座標は，右端の$F = \infty$上における2本の同一等高線の下方の位置と一致することを意味している(**Fig.1.**)。したがってこれを満たしていないGet and Haight(1989)のFIGURE 4.1のような図は誤りである。

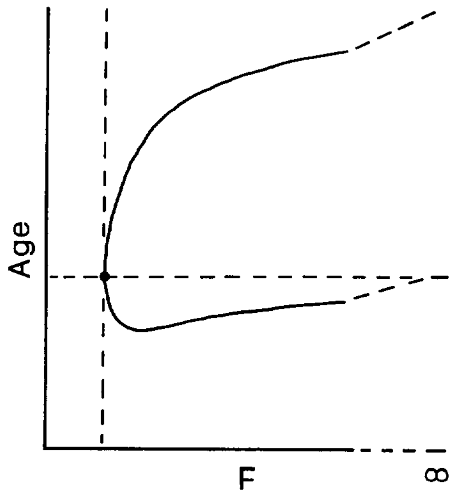

Fig.1. The eumetric point on the yield isopleth diagram.

Beverton and Holt(1957)は成長式としてベルタランフィの3乗式を採用している。通常の魚種では漁獲対象となる範囲においてそれで十分に成長が表せるからである。しかし最適制御問題として検討すると，これにより積分$I(t)$を数式で厳密に処理できることの方が重要である。等漁獲量曲線図は最適制御をグラフを用いて求める方法と解釈できる。一方，一般の計算式を用いた場合には$I(t)$を求めるために精度の高い数値積分を行う必要がある。このため最

大原理を用いるメリットが半減する。数値積分でYの値を計算してY^{max}を直接に探索するのと大差なくなってしまうからである。$\lambda(t)$および$I(t)$が積分式としてしか求まらないことに注意してほしい。ただしバイオマスの変化が単峰型でない複雑な場合には最大原理の方が有効だろう。

等周問題　最近では再生産を考慮した最適漁獲方策も検討されている。たとえば松田(1996)や山内(1996)では総産卵数を一定値以上確保するという拘束条件のもとで最大原理を適用している。1回産卵の場合には境界条件を変更するだけでよいが，多回産卵の場合には変分法における「等周問題」に拡張する必要がある。後者は前者を完全に含んでいるので，ここでは後者についてのみ述べる。1尾あたりの平均産卵数を$r(t)$とすると，総産卵数Rは

$$R = \int_0^T N(t)r(t)\mathrm{d}t \tag{1.33}$$

と表せる。拘束条件は$R \geqq R_0$であるが，余分に産卵数を確保する必要はないので$R = R_0$としてよい。これよりラグランジュの未定乗数法を適用すると，目的関数は

$$Y = \int_0^T F(t)N(t)W(t)\mathrm{d}t + \mu\left(\int_0^T N(t)r(t)\mathrm{d}t - R_0\right) \tag{1.34}$$

とおける。ここでμは未定乗数でtに無関係な定数である。このときハミルトン関数は

$$\begin{aligned} H &= FNW - \lambda(F+M)N + \mu Nr \\ &= \{(W-\lambda)F - \lambda M + \mu r\}N \end{aligned} \tag{1.35}$$

となる。以下は前節と同じ計算を行って，

$$\lambda(t) = \int_t^T \{F(v)W(v) + \mu r(v)\}\exp\{-\int_t^v (F+M)\mathrm{d}u\}\mathrm{d}v \tag{1.36}$$

を得る。FWにμrを加えただけである。μの値は解析的に求めることができないので，数値計算で求めるしかない。この場合にも本来のモデルと同様に特異解は存在しない。特異解とは一定の区間で$\partial H / \partial F = 0$を満たす解(変分法の解の一部)であるが，(1.35)式より$W \equiv \lambda$となる。これより随伴方程式を考慮すると，

$$W' \equiv \lambda' = M\lambda - \mu r = MW - \mu r \tag{1.37}$$

となるが，体重の成長式Wはこのような微分方程式を満たさないからである。

割引率と費用関数

Clark(1976)は成長・生残モデルに経済的概念として割引率と費用関数を導入した。これにより魚類タンパク質の有効利用というマクロな側面が薄れ，単なる漁家の経営方策というミクロな側面が強くなった。しかし数学モデルとしてはより複雑となり，いまだに十分な理解が普及していないように思う。それはClark(1976)の記述に一部不適切な部分があるためで，した

がってここではより正確な解説を行い，その後で検討を加えることとする。

変分法の応用　Clark(1976)では割引率と費用関数を導入し，最初に拘束条件付き変分法の解を求めている。連続型の割引率 δ の効果は $e^{-\delta t}$ と表せるが，δ ＝一定と仮定している。なお δ はデルタ関数や変分とは無関係である。また努力量をX，費用をPとすると，

$$F = pX \tag{2.1}$$

$$P = qX \tag{2.2}$$

という正比例の関係を仮定している。(2.1)式は水産資源解析学では広く使用されているが，本来は$E = pX$であり，次章で検討する。また(2.2)式についても実際の漁業ではこのように単純化できない場合が多いと思われるが，これについては立ち入らないこととする。両式より

$$P = CF \tag{2.3}$$

となるから(Cは定数)，Clark(1976)のモデルは

$$Y = \int_0^T e^{-\delta t}\{N(t)W(t) - C\}F(t)\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

$$N' = -\{F(t) + M(t)\}N(t) \tag{2.5}$$

と表せる。これよりハミルトン関数は

$$H = e^{-\delta t}(NW - C)F - \lambda(F + M)N \tag{2.6}$$

となる。ここで$\partial H / \partial F = 0$を求めると，

$$e^{-\delta t}(NW - C) = \lambda N \tag{2.7}$$

となる。一方，随伴方程式は

$$\lambda' = -\partial H / \partial N = e^{-\delta t}WF - \lambda(F + M) \tag{2.8}$$

である。したがってこの2式を連立して解けばよい。(2.7)式より $\mathrm{d}\lambda / \mathrm{d}t$ を求め，(2.8)式に代入して整理し，N について解くと，

$$N^{\bullet} = \frac{C\delta}{W(\delta + M - W'/W)} \tag{2.9}$$

を得る。$B = NW$だから，

$$B^{\bullet} = \frac{C\delta}{\delta + M - W'/W} \tag{2.10}$$

となる。また $N' = -(F + M)N$ だから，$F = -(\ln N)' - M$ より

$$F^{\bullet} = \frac{WM + W'(\delta + M) - W''}{W(\delta + M) - W'} - M \tag{2.11}$$

となる。

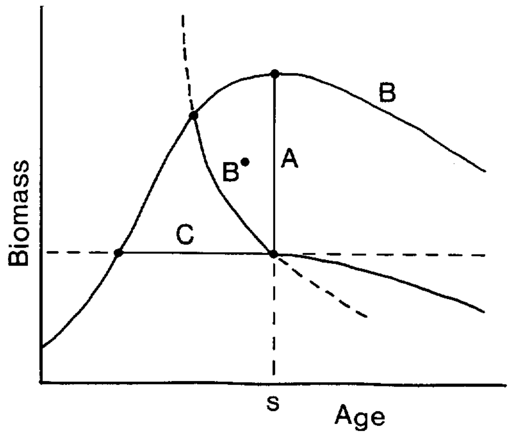

Fig.2. The solution of Clark's model by the calculus of variations.
A : $\delta = 0$, B : Natural biomass, B* : $0 < \delta < \infty$, C: $\delta = \infty$.

ここで(2.10)式について検討してみると，

$$\delta + M = W'/W \tag{2.12}$$

という縦軸に平行な漸近線を持っている。また常に$NW \geqq C$でないと漁業が成立しないから，**Fig.2.** のB*ような解となる。$\delta = 0$のときにはインパルス制御となるが（**Fig.2**のA），$B^{*\prime}(s) = 0$で$M = W'/W$となるから，この結果は前章の結果と完全に一致する。Clark(1976)は割引率の極限としてインパルス制御を導いたのであるが，デルタ関数は提示していない。一方，$\delta = \infty$のときには「地代の消失」が起きる(**Fig.2**のC)。つまり現時点の漁獲が無限の価値を持つのだから，バイオマスの増加を期待して漁獲をひかえることは無意味で，その時点で可能な限り漁獲するのが最適方策となる。しかし$\delta = \infty$という仮定は非現実的だろう。また$C = 0$の場合にはすべて(2.12)式の時点でのインパルス制御となり，$B = 0$となるまで採り尽くすのが最適方策となる。結局，$C\delta \neq 0$の場合にのみインパルス制御でない特異解が出現するのである。

最大原理の応用　前節ではFについて何の拘束条件も仮定しなかったが，ここでは現実的な不等式拘束条件

$$0 \leqq F \leqq F^{max} < \infty \tag{2.13}$$

を仮定する。Clark(1976,1985)では$\delta = 0$の場合しか扱っていない。このときハミルトン関数は$B = NW$より，

$$\begin{aligned} H &= (B - C)F - \lambda(F + M)N \\ &= (B - C - \lambda N)F - \lambda MN \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。また随伴方程式は(1.22)式と同一となるため，(1.29)式と同一の解$\lambda = I/N$を得

る。したがって F の最適制御方策は

$$F^{\circ}=\begin{cases}F^{max} & (B-C>I\text{ のとき})\\ 0 & (B-C<I\text{ のとき})\end{cases} \tag{2.15}$$

となる。この解は現在の利益が将来の利益を上回るときだけ $F=F^{max}$ で漁獲する事を意味しており，我々の常識と一致する。随伴方程式を最初に解析的に解いたのはGoh(1980)であるが，(2.15)式自体を最初に示したのはClark(1976)である。バイオマスが(1.10)式のように単峰型の場合には，$0<a<s<b<T$ として直感的に以下の解を得る(**Fig.3.**)。

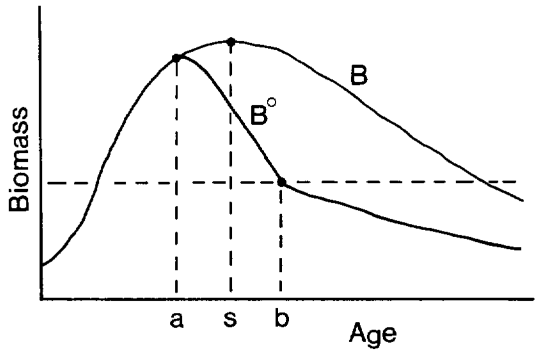

Fig.3. The solution of Clark's model by Pontyagin's maximum principle.
B: Natural biomass, B°: Fished biomass.

$$F^{\circ}=\begin{cases}F^{max} & (a\leqq t\leqq b\text{ のとき})\\ 0 & (0\leqq t<a,\ b<t\leqq T\text{ のとき})\end{cases} \tag{2.16}$$

これより $t=b$ のとき $I(b)=0$ だから，

$$B(b)=C \tag{2.17}$$

および $t=a$ のとき

$$B(a)-C=I(a) \tag{2.18}$$

となる。(2.17)式を(2.18)式に代入すると，

$$B(a)-B(b)=I(a)=F^{max}\int_a^b B\mathrm{d}t \tag{2.19}$$

を得る。この式は最適制御の場合には，

バイオマスの変化 = 総漁獲重量

となることを意味している。$C=0$ の場合には $B(a)=I(a)$，$b=T$ となって前章の例と一致する。なお(2.19)式は(2.17)式が

$$B(b)-C=I(b) \tag{2.20}$$

という一般の場合にも成立することに注意する必要がある。この関係式は後で用いる。

Clark(1976)では随伴方程式を活用せずに，初歩的な方法で同様の結果を得ている。これを$F^{max} \to F$と略記して以下に示す。

$$Y(a,b) = \int_a^b (B - C)F\mathrm{d}t$$

$$= F\int_a^b B\mathrm{d}t - CF(b-a) \tag{2.21}$$

ここで

$$B(t) = \phi(a)\psi(t) \tag{2.22}$$

とおくと，(2.21)式の右辺第1項は

$$F\phi(a)\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t \tag{2.23}$$

となる。Yを最大にする(a,b)を求めればいいので，

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = F\frac{\partial \phi}{\partial a}\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t - F\phi(a)\psi(a) + CF$$

$$= F\{F\int_a^b B\mathrm{d}t - B(a) + C\} = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = F\phi(a)\psi(b) - CF = F\{B(b) - C\} = 0 \tag{2.25}$$

を解けばよい。ここで$\phi(a) = N_0\mathrm{e}^{Fa}$だから$\partial\phi / \partial a = F\phi(a)$を用いた。この両式は(2.17)および(2.18)式と同一である。

実際に(a,b)の値を求めるには数値計算が必要であるが，Clark(1976)は以下のような方法を提示している。まずバイオマスの変化についての一般式を求める。Bを微分すると

$$\mathrm{d}B = \mathrm{d}(NW) = (\mathrm{d}N)W + N(\mathrm{d}W) = -(F+M)N(\mathrm{d}t)W + N\mathrm{d}W \tag{2.26}$$

だから，これを積分すると，

$$\int_a^b \mathrm{d}B = B(b) - B(a) = -\int_a^b FB\mathrm{d}t - \int_a^b MB\mathrm{d}t + \int_a^b N\mathrm{d}W \tag{2.27}$$

となる。これは常に成立する恒等式であるが，最適制御下では(2.19)式が成立するので，左辺と右辺第1項が打ち消しあって，

$$\int_a^b (N\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - MB)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.28}$$

となる。ここで被積分関数を

$$y(t) = NW' - MB = B(W'/W - M) \tag{2.29}$$

とおけば，$M=$ 定数の場合には $y(t)$ は単調減少関数で，$y(s)=0$だから(2.28)式より$a<s<b$が明らかで，しかも

$$\int_a^s y\mathrm{d}t = -\int_s^b y\mathrm{d}t \tag{2.30}$$

が成立する。この(2.28)式を用いて数値計算を行えばよい。

特異解の検討　前々節の変分法の解は最大原理では特異解に相当する。そこで問題となるのはClark(1976,1985)が扱わなかった$C\delta\neq0$の場合に，インパスル制御でない特異解(2.10)が最大原理において存在するかどうかである。以下にこれを検討しよう。特異解は既に導いているが，ここでは$C\delta\neq0$の場合の最大原理の判別式

$$B(t) - C = \int_t^T \mathrm{e}^{-\delta(v-t)} B(v)F(v)\mathrm{d}v \tag{2.31}$$

から直接に導いてみよう。この式の両辺をtで微分すると前節と同様の計算によって，

$$B' = \delta(B - C) - BF \tag{2.32}$$

を得る。一方，$N = B/W$を$N' = -(F+M)N$に代入してFを求めると，

$$F = \frac{W'}{W} - \frac{B'}{B} - M \tag{2.33}$$

を得る。(2.33)式を(2.32)式に代入して整理すると特異解(2.10)を得る。これより明らかに(2.9)～(2.11)式は特異解が存在するための必要条件である。次に十分条件を求めてみよう。

(2.10)式とその微分式および(2.11)式から「$^\bullet$」を省略し計算すると，(2.32)式と同等な$BF = \delta(B-C) - B'$という恒等式を得る。これを(2.31)式に代入して部分積分を行うと，最終的に

$$B(T) = C \tag{2.34}$$

という条件式を得る。$B(s) = C$であるから，結局，

$$s = T \tag{2.35}$$

が求めていた十分条件で，つまり$s<t$では$F\equiv0$となることを意味している。Fは(Mが定数のとき)単調減少関数なので，特異解が存在する場合は$\alpha<\beta<s$として$F=F^{\max}$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$，$F=F^\bullet$ $(\beta<t\leqq s)$，$F=0$ $(0\leqq t<\alpha,\ s<t\leqq T)$ というのが最適解となるが，これは不可能である。なぜなら判別式より$B(\alpha)-C=I(\alpha)$，$B(\beta)-C=I(\beta)$となるから，前節で証明したように$\alpha<s<\beta$でなくてはならないからである。したがって$C\delta\neq0$の場合にも特異解は存在しないので，判別式(2.31)を用いて(2.16)式と同様の最適制御を数値計算で求めて行えばよいことになる。

離散型漁獲方程式と線型計画法

一般の成長・生残モデルにおいて最大原理により最適化方策を実現するためには，数値計算とりわけ精度の高い数値積分が必要である。実際の漁業管理に際してはそれほど精度にこだわらず，大雑把な推定値でよいとする立場もあるが，それならば最大原理のような厳密な手法を導入する意義が半減するだろう。この章では離散型漁獲方程式に最大原理を適用する。これによって面倒な数値積分が不要となるからである。さらに同一モデルについて線型計画法も検討するが，これを用いると最大原理自体も不要となってしまう。このように単純化した漁業管理モデルでは線型計画法のような初等的な方法でも十分であるが，最大原理の有効性自体は否定されるものではなく，その将来性も含めて十分に理解することが望ましい。最後に基本モデルである漁獲方程式自体にも検討を加えてみる。

離散型最大原理の応用　ここでは第1章の問題を離散モデルで検討してみよう。その方が簡単で理解しやすいからである。離散型では目的関数および拘束条件は

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} E_k N_k W_k \tag{3.1}$$

$$N_{k+1} - N_k = -(E_k + D_k) N_k \tag{3.2}$$

で与えられる。ここで E は漁獲死亡率，D は自然死亡率なので，

$$S_k = 1 - E_k - D_k \tag{3.3}$$

は生残率を表している。(3.2)式はコホート解析モデルで，従来の漁獲方程式との関係は赤嶺(1995b)で論じている。(3.2)式の解は

$$N_k = N_0 S_0 S_1 \cdots S_{k-1} \tag{3.4}$$

である。また不等式拘束条件は

$$0 \leqq E_k \leqq E_k^{\max} \tag{3.5}$$

である。ハミルトン関数は

$$\begin{aligned} H_k &= E_k N_k W_k - \lambda_k (E_k + D_k) N_k \\ &= \{(W_k - \lambda_k) E_k - \lambda_k D_k\} N_k \end{aligned} \tag{3.6}$$

となるが，これより

$$E_k^{\circ} = \begin{cases} E_k^{\max} & (W_k > \lambda_k \text{のとき}) \\ 0 & (W_k < \lambda_k \text{のとき}) \end{cases} \tag{3.7}$$

という最適制御解を得る。

このとき随伴方程式は

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = -\partial H_k / \partial N_k = (E_k + D_k)\lambda_k - E_k W_k \tag{3.8}$$

となり，境界条件は

$$\lambda_{n-1} = 0 \tag{3.9}$$

である。(3.8)式は1階線型差分方程式であるが，これは簡単に解ける。(3.8)式を

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{k-1}}{S_k} - \frac{E_k W_k}{S_k} \tag{3.10}$$

と変形し，$\lambda_{-1} = c$とおけば，

$$\lambda_0 = \frac{c}{S_0} - \frac{E_0 W_0}{S_0}$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{S_0 S_1} - \frac{E_0 W_0}{S_0 S_1} - \frac{E_1 W_1}{S_1}$$

となるから，ただちに一般解

$$\lambda_i = \frac{c}{S_0 \cdots S_i} - \frac{E_0 W_0}{S_0 \cdots S_i} - \cdots - \frac{E_i W_i}{S_i} \tag{3.11}$$

または

$$\lambda_i = (cN_0 - \sum_{k=0}^{i} E_k N_k W_k) / N_{i+1} \tag{3.12}$$

を得る。ここで$\lambda_{n-1} = 0$を用いると，

$$cN_0 = \sum_{k=0}^{n-1} E_k N_k W_k \tag{3.13}$$

となるから，結局，

$$\lambda_i = (\sum_{k=i+1}^{n-1} E_k N_k W_k) / N_{i+1} \tag{3.14}$$

が求める解である。以上より(3.7)式の判定は

$$W_i = (\sum_{k=i+1}^{n-1} E_k N_k W_k) / N_{i+1} \tag{3.15}$$

によって行うことになる。以上のモデルにおいて区間幅を縮小していけば，第1章の連続モデルとすべて一致する。

実は(3.15)式は最大原理を用いなくても微分だけで導くことができる。つまり(3.1)式をE_iで微分するだけでよい。このとき(3.3)式より$\partial S_i / \partial E_i = -1$だから，(3.4)式より$i+1 \leqq k$のとき

$$\partial N_k / \partial E_i = -N_0 S_1 \cdots S_{i-1} S_{i+1} \cdots S_{k-1} = -N_k N_i / N_{i+1} \qquad (3.16)$$

となる。なお$i+1>k$のときには$\partial N_k / \partial E_i = 0$である。これより

$$\frac{\partial Y}{\partial E_i} = N_i W_i - (\sum_{k=i+1}^{n-1} E_k N_k W_k) N_i / N_{i+1} = 0 \qquad (3.17)$$

とおけば，ただちに(3.15)式を得ることができる。これは実は連続モデルにおける変分である。連続モデルでは横軸(時間軸)方向の変位を微分，縦軸方向の変位を変分と呼んで区別している。離散モデルでは横軸方向の変位が差分となるので，縦軸方向の変位を微分と呼んでも問題ないのである。連続モデルにおいてここと同じ計算を数学的に厳密に保証しているのが，変分法および最大原理である。連続モデルでは「積分と極限(微分)の順序交換」を行う必要があるが，一般の関数ではこれは保証されない。たとえばデルタ関数(1.14)について(1.18)式を定義式として与え，微分の定義式(A.4)を用いれば，積分と極限の順序を交換して(1.15)および(1.16)式を導くことができるが，これは一般には保証されないから両式を定義として与える必要がある。微分で簡単に導けるのが離散モデルの利点である。

次に前章と同様に割引率と費用関数を導入してみよう。割引率は離散型では$e^{-\delta t} \to 1/(1+i)^t$と表すため，(3.1)式は

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(N_k W_k - C) E_k}{(1+i)^k} \qquad (3.18)$$

となる。後は同様の計算により最終的な判別式は

$$\frac{B_i - C}{N_i} = \sum_{k=i+1}^{n-1} \{ \frac{E_k B_k}{(1+k)^{k-i}} \} / N_{i+1} \qquad (3.19)$$

となる。ここで$B = NW$である。

線型計画法　前節では離散型最大原理(および微分)を用いて解いたが，この問題は線型計画法でも簡単に解くことができる(赤嶺,1996b；Akamine,1997)。ここでは概略だけを述べるが，制御変数として漁獲死亡率Eではなく資源尾数(または生残率)Nを採用することが要点である。(3.2)式より

$$E_k N_k = (1 - D_k) N_k - N_{k+1} \qquad (3.20)$$

となるから，目的関数(3.1)はNの線型結合で表される。また(3.2)式および不等式拘束条件(3.5)より

$$(1 - D_k - E_k^{\max}) N_k \leqq N_{k+1} \leqq (1 - D_k) N_k \qquad (3.21)$$

という不等式拘束条件が得られる。したがって制御変数をN_kとすれば，この問題は線型計画法で解けることになる。ただし費用関数を考慮した場合には非線型となるため適用できない。最大原理は非線型モデルにも適用できる点で線型計画法よりも優れている。

線型計画法では容易にモデルを拡張できる。たとえば第1章の等周問題のように総産卵数についての不等式拘束条件を考慮する場合には，

$$R = \sum_{k=1}^{n} N_k r_k \geqq R_0 \tag{3.22}$$

という不等式を追加するだけでよい。一方，最大原理でこれと同じ問題を扱う場合には新たに未定乗数として μ = 定数を追加し，目的関数を

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} E_k N_k W_k + \mu \left(\sum_{k=1}^{n} N_k r_k - R_0 \right) \tag{3.23}$$

と変更しなくてはならない。その結果，判定式は

$$W_i = \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} E_k N_k W_k + \mu \sum_{k=i+1}^{n} N_k r_k \right) / N_{i+1} \tag{3.24}$$

となる。前節同様に(3.24)式は(3.23)式において $\partial Y / \partial E_i = 0$ とすれば簡単に導くことができる。μ は定数であるが，解析的に解くことができないので数値計算が必要である。

線型計画法の結果(赤嶺,1996b)によれば，不等式拘束条件(3.22)がある場合には，E は0～$E^{\max}$ の中間の値をとることがある。これは特異解であるが，前章で証明したように連続モデルでは特異解は存在しない。連続モデルでは横軸(時間軸)方向で調整できるが，離散モデルでは横軸方向で調整できないため縦軸方向で調整する必要があり，このため特異解が出現すると解釈できる。このタイプの問題で特異解が出現するのは離散モデルの特徴である。

漁獲方程式　以上のように連続モデルよりも離散モデルの方が簡単で扱いやすいが，最後に漁獲方程式自体について考察してみよう。連続モデルの漁獲方程式は $Z(t) = F(t) + M(t)$ とすると，

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -Z(t)N(t) \tag{3.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}C^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = F(t)N(t) \tag{3.26}$$

で与えられる。$N(t)$ は資源尾数，$C^{\mathrm{T}}(t)$ は累積漁獲尾数である。これより

$$E(t) = \int_0^T F(t)S(t)\mathrm{d}t \tag{3.27}$$

$$D(t) = \int_0^T M(t)S(t)\mathrm{d}t \tag{3.28}$$

$$S(t) = \exp\{ -\int_0^t Z(u)\mathrm{d}u \} \tag{3.29}$$

を得る。ここで

$$1 = S(t) + E(t) + D(t) \tag{3.30}$$

は恒等式であるが，これにN_0を掛ければ尾数の式となる。

F = 一定かつM = 一定の場合には，区間0〜1において漁獲方程式を解くと，

$$N_1 = N_0\,\mathrm{e}^{-Z} = N_0\,\mathrm{e}^{-F-M} \tag{3.31}$$

$$C^{\mathrm{T}}{}_1 = N_0\,\frac{F}{F+M}\,(1-\mathrm{e}^{-F-M}) \tag{3.32}$$

となる。また

$$E = \frac{F}{F+M}\,(1-\mathrm{e}^{-F-M}) \tag{3.33}$$

$$D = \frac{M}{F+M}\,(1-\mathrm{e}^{-F-M}) \tag{3.34}$$

$$S = \mathrm{e}^{-Z} = \mathrm{e}^{-F-M} \tag{3.35}$$

であるが，(3.33)式と(3.34)式の逆写像は

$$F = -\frac{E}{E+D}\,\ln\,(1-E-D) \tag{3.36}$$

$$M = -\frac{D}{E+D}\,\ln\,(1-E-D) \tag{3.37}$$

である。つまり「F = 一定かつM = 一定」の場合には本質的に離散モデルと同一である。

(3.25)式と(3.26)式の漁獲方程式を離散モデルに書き換えると，

$$N_{k+1} - N_k = -\,(E_k + D_k)N_k \tag{3.38}$$

$$C^{\mathrm{T}}{}_{k+1} - C^{\mathrm{T}}{}_k = E_k N_k \tag{3.39}$$

となる。これより

$$N_1 = N_0 S_0 = N_0(1 - E_0 - D_0) \tag{3.40}$$

$$C_0 = C^{\mathrm{T}}{}_1 - C^{\mathrm{T}}{}_0 = E_0 N_0 \tag{3.41}$$

を得る。ここでC_0は区間0〜1における漁獲尾数である。連続モデルと比較してみると，実に簡単明瞭である。

一方，連続モデルではNは実際には自然数だから，微分方程式では厳密には表せない。そこでデルタ関数を用いてZを厳密に表現してみよう。まず

$$Z(t) = z_1\,\delta\,(t - s_1) + \cdots + z_n\,\delta\,(t - s_n) \tag{3.42}$$

とする。このとき

$$\int_0^T Z(t)\,\mathrm{d}t = z_1 + \cdots + z_n \tag{3.43}$$

となるから，Zの平均値は

$$Z^* = (z_1 + \cdots + z_n)/T \tag{3.44}$$

となる。FとMについても同様にすると，

$$F(t) = f_1 \delta (t - u_1) + \cdots + f_p \delta (t - u_p) \tag{3.45}$$
$$M(t) = m_1 \delta (t - v_1) + \cdots + m_q \delta (t - v_q) \tag{3.46}$$

となるので，Zの平均値は

$$Z^* = (f_1 + \cdots + f_p + m_1 + \cdots + m_q)/T \tag{3.47}$$

となる。しかしFおよびMのそれぞれの平均値についてはこの方法は使えない。(3.27)および(3.28)式に従ってEとDの値を求め，それを(3.36)および(3.37)式の逆写像式に代入して求めなくてはならない。具体的には個々の漁獲時において，

$$E_i = S_i\{1 - \exp(-f_i)\} \tag{3.48}$$
$$D_j = S_j\{1 - \exp(-m_j)\} \tag{3.49}$$

を求めれば，$E^* = \Sigma E_i$，$D^* = \Sigma D_j$として求めることができる。以上の議論は連続モデルの漁獲方程式を基本にした場合のことであって，最初から離散型漁獲方程式を基本にしていれば不要な議論である。

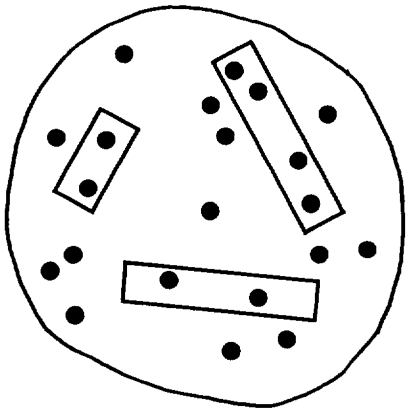

Fig.4. Illustration of the trawl fishing.

ここで保留しておいた(2.1)式について検討してみよう。**Fig.4.**のような閉鎖海域における底曳網漁業をモデルとして考える。この図より漁獲確率は掃海面積に比例すると考えてよいだろう。一方，漁獲努力量は掃海面積に比例すると考えられる。したがって本来の関係式は

$$E = pX \tag{3.50}$$

のように漁獲死亡率とすべきである。(2.1)式はこの近似式と解釈できる。実際の漁業においては(2.1)式の方が適合している場合もありえるが，(2.1)式の方が理論的に正しいという根拠

はどこにもない。死亡係数を用いた連続モデルの長所はその扱いやすさであり，離散モデルのように変数の添字にまで気を配る必要はない。また第1章で示したようにインパルス制御も簡単に導くことができる。しかし実際の漁業現場への適用に際しては，離散モデルの方が扱いやすく現実的だと思う。

考　察

Beverton and Holt(1957)の成長・生残モデルでは成長はベルタランフィの3乗式，生残は指数関数と限定されていたが，Clark(1976)とGoh(1980)では一般的な式に拡張されている。これは一般的な式のまま解析的に処理できるという最大原理の威力によるところが大きい。得られた最適解は，現在の利益と将来の利益を比較して漁獲を切り替えるという，きわめて一般的で常識的なものである。この解析解は積分を含んでいるため，数値解を得るためにはきわめて精度の高い数値計算が必要である。Beverton and Holt(1957)の等漁獲量曲線図はこれをグラフを用いて解いたものと解釈できる。このように考えるとClark(1976)とGoh(1980)の成長・生残モデルについての寄与は，理論的な面が強く，応用面での寄与は少ない。極論すれば「目的関数Yの最大値を求める」問題を，「$Y'=0$となる条件を求める」問題に言いかえただけで，これは最大原理が微分の拡張であることを端的に表している。

成長式と生残式を一般化したことにより，バイオマスが時間について単峰型とならない一般的な場合にも適用可能となったが，はたしてそのような漁業は存在するだろうか。たとえば太平洋側のマイワシ資源について考えてみると，シラスと成魚についてそれぞれ漁業が存在するため，漁業収益の面から考えれば，確かに二峰型となる。しかしそれぞれの漁業者や商品価値はまったく異なっており，単一尺度で評価できるものではない。日本の漁業の多くはきわめて重大な社会問題を含んでいるのである。実際にバイオマスが多峰型となる漁業資源が存在するとしても，個々の峰に切断してそれぞれを比較検討すれば，それで実用的には十分対応できるだろう。

Clark(1985)はBeverton and Holt(1957)の成長・生残モデルについて，経済学的考察とりわけ割引率を含んでいない点を批判している。しかしClark(1976,1985)自身も最大原理の応用問題では$\delta=0$として割引率を無視している。割引率を考慮しているのは変分法の応用においてだけで，この場合にはFは一般に非常に大きな値をとり，漁獲モデルとしては非現実的である。Clark(1985)は成長・生残モデルの等漁獲量曲線図について縦軸方向の最大点をユーメトリック点，横軸方向の最大点をカコメトリック点と呼んでいるが，等漁獲量曲線図はこれらの最大値を実現するためだけのものではない。現状を正しく認識し，よりよい方向を指し示すものと解釈すべきである。実際問題として用いられる成長式や生残率の信頼度が最適方策を与えるには低すぎる，という事情も十分に考慮する必要がある。

Clark(1976)は割引率と費用関数を導入した複雑なモデルを検討したが，数学的には興味深くても，現実的なモデルとは言いがたい。割引率は一定，費用関数は漁獲努力量に正比例するという単純な関係を仮定しているからである。本来の成長・生残モデルは魚類資源から最大量のタンパク質を得ようとする，漁業以外の関連産業も含めた非常にマクロな視点に立った優れたモデルであるが，Clark(1976)のモデルでは単一漁業についての経営コンサルタント的なミ

クロな視点，それも極めて時間スケールの短い視点にしか立っていない。

以上のようにClark(1976)の提示した成長・生残モデルにおける展開自体は，いろいろな問題点を含んでいるが，従来のモデルに最適制御の概念を導入したこと自体は高く評価すべきである。また成長・生残モデルへの応用はClark(1976)やGoh(1980)の業績の一部分でしかないことも考慮する必要がある。実際問題への応用については数値計算が主体となるが，さまざまなモデルへの展開が可能であり，実際に多くの論文が発表され続けている。

最近の研究成果として再生産を考慮した最適漁獲方策を紹介したが，逆に巌佐(1978)はいくつかの拘束条件下で総産卵数を最大にする死亡戦略を検討している。これは漁獲モデルではなくて生き残り戦略のモデルなので，制御変数として全死亡係数Zを用いている。しかし$Z = F + M$であり，$M =$ 既知とすれば漁獲死亡係数Fを制御変数として用いていることと同じである。魚類とりわけ浮魚の再生産関係は不確実性が高く，総産卵数がある値以上であれば安全だという閾値は決定しにくい。またほとんどの漁業対象種で「総漁獲量規制」が行われようとしてるのが現状である。したがって総漁獲重量を目的関数ではなく拘束条件として用い，総産卵数または総漁獲収益を目的関数として漁獲方策を検討する方が現実的ではないだろうか。

ここで扱ったモデルはきわめて抽象的かつ一般的なものである。必要なものは成長と生残のパラメータだけで，それらについての大雑把な推定値さえ得られれば，簡単な数値計算の結果だけで最適漁獲方策を決定できる。しかしそのような教科書的な解答では，実際の漁業管理には何の役にも立たないだろう。重要なのはこのような計算結果も参考にして，より現実的で実行可能な管理方策を検討することである。そのためにも難解な数学的概念を，より簡明な手法として現場に提供することが大切である。

結　論

バイオマスが時間的に単峰型を示す単純な場合に，成長・生残モデルにおいて最大原理による最適漁獲方策を検討し，以下の結論を得た。

1) 漁獲死亡係数Fに拘束条件がない場合にはバイオマス最大時におけるインパルス制御で採り尽くしてしまうのが最適である。しかし実際の漁業ではFに不等式拘束条件がある場合が多く，その場合には従来のBeverton and Holt(1957)の等漁獲量曲線図と同じ結論を得る。つまりそのときのバイオマスとそれ以降の総漁獲重量が一致する時点が，漁獲開始時として最適である。この厳密な解析解はClark(1976)とGoh(1980)によって示された。

2) Clark(1976)は割引率と費用関数を導入した。このモデルではFに拘束条件のない場合にはインパルス制御でない特異解が現れる。しかしFが大きな値をとるため現実的にはインパルス制御と大差ない。割引率と費用関数のどちらかを無視するとインパルス制御となる。Fに不等式拘束条件がある場合には特異解は存在せず，バイオマス最大時を含む区間で$F = F^{max}$とする漁獲方策が最適となる。

3) 成長・生残モデルに総産卵数をある値以上確保するという不等式拘束条件を追加した場合には，1回産卵では境界条件を変更するだけ，多回産卵では等周問題に拡張すればよいが，前者は後者に含まれる。連続モデルではこの場合にも特異解は存在しないが，離散モデルでは特異解が現れる。最適解として現在の利益と将来の利益の比較によって漁獲を切り替える

という，常識的な解が得られるが，これは従来のモデルの解を一般化したものである。しかし再生産関係が不明確な魚種については，このような方策は実用的でない。

4) 連続モデルにおいて漁獲方程式を厳密に記述するには，死亡係数を超関数であるデルタ関数の線型結合で定義する必要がある。しかし離散モデルではそのような議論はまったく不要である。また離散モデルでは最大原理の結果を微分だけで導くことができる。

5) 以上の最適解を計算するには数値積分を含む数値計算が不可欠である。しかし死亡係数ではなく死亡率を用いた離散モデルでは数値積分は不要なので計算量は少なくてすむ。さらに線型計画法を利用すれば最大原理さえ不要である。このような単純な手法でも十分に実用的であるし，理論的にも問題がない。

文 献

赤嶺達郎，1995a：水産資源学における成長式に関する数理的研究.中央水研報,**7**,189 − 263.

赤嶺達郎，1995b：コホート解析(VPA)入門．水産海洋研究，**59**(4)，424 − 437.

Akamine T.，1996a：Application of the maximum principle to the yield isopleth diagram. *Bull. Natl. Res. Inst. Fish. Sci.*, **8,** 59 − 60.

赤嶺達郎，1996b：離散型漁獲方程式と線型計画法．水産海洋研究，**60**(3)，252 − 258.

Akamine T.，1997：Optimum fishing policy by linear programming on discrete fishing equations. *Fisheries Science*,**63**,155−156.

Beverton R.J.H. and Holt S.J.，1957：On the dynamics of exploited fish populations. Fisheries investigations series **2**(19), Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, London, 533pp.

Clark C.W.，1976：Mathematical bioeconomics. John Wiely & Sons, New York, 352pp.（竹内 啓・柳田英二訳「生物経済学」啓明社，東京，342pp.）

Clark C.W.，1985：Bioeconomic modelling and fisheries management. John Wiely & Sons, New York, 291pp.（田中昌一監訳「生物資源管理論」恒星社厚生閣，東京，300pp.）

Get W.N.and Haight R.G.，1989：Population harvestig. Princeton University Press, Princeton, 391pp.

Goh B − S.，1980：Management and analysis of biological populations. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam, 288pp.

一松 信，1990：微分積分学入門第二課．近代科学社，東京，216pp.

Hiyama Y. and Kitahara T.，1993：Theoretical consideration of effect of fishing mortality on growth and reproduction of fish populations. *Res. Popul. Ecol.*, **35,** 285 − 294.

Hiyama Y., Kitahara T. and Tokai T., 1988：Numerical prediction of a relation among growth, reproduction and mortality in iteroparous fish populations. *Res. Popul. Ecol.*, **30**, 267 − 278.

巌佐 庸，1978：生き残りのための死亡戦略．数理科学，**183**，18 − 23.

巌佐 庸，1981：生物の適応戦略．サイエンス社，東京，229pp.

巌佐　庸，1990：数理生物学入門．HBJ出版局，東京，350pp．
加藤寛一郎，1988：工学的最適制御．東京大学出版会，東京，241pp．
Kitahara T., Hiyama Y. and Tokai T., 1987 : A preliminary study on quantitative relations among growth, reproduction and mortality in fishes. *Res. Popul. Ecol.*, **29**, 85－95.
松田裕之，1996：魚はいつ，何歳から獲るべきか？．海洋と生物，**104**，210－215.
森　毅，1966：ベクトル解析．国土社，東京，195pp．
斎藤利弥，1965：ポントリャーギンの最大値原理．数学セミナー1965年1月号．（数学セミナーリーディングス，現代数学への招待．日本評論社，東京，1972，211－214.）
篠崎寿夫，松森徳衛，吉田正廣，1991：現代工学のための変分学入門．現代工学社，東京，138pp．
山内　淳，1996：水産資源学への最適理論の応用．個体群生態学会会報，**53**，57－62.

付　録

A．微分法の基礎

最初に1変数関数

$$Y = f(x) \tag{A.1}$$

の微分を考えてみる。これは上式を局所的に1次式

$$Y = ax \tag{A.2}$$

で近似することである。これを

$$\mathrm{d}Y = f'(x)\mathrm{d}x \tag{A.3}$$

と表現する。$\mathrm{d}Y$ および $\mathrm{d}x$ が「微分」で，Y および x の微小な増分と解釈してよい。$f'(x)$は(A.2)式の傾き a に相当する係数で，x における「微係数」と呼ばれ，次式で定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{A.4}$$

(A.3)式より $f'(x) = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$ と表現できることがわかる。極値問題では $f'(x) = 0$ とおいて，これを満たすxの値を求めるが，極値においては局所的に傾きが0となるからである。これは $\mathrm{d}x$ がどのように動いても常に $\mathrm{d}Y = 0$ となることを意味している。これを「停留」条件と呼び，変分法はこの性質を利用して問題を解く方法である。

次に2変数関数

$$Y = f(x, y) \tag{A.5}$$

の微分について考えよう。これは1変数の場合と同様で，局所的に2変数の1次式

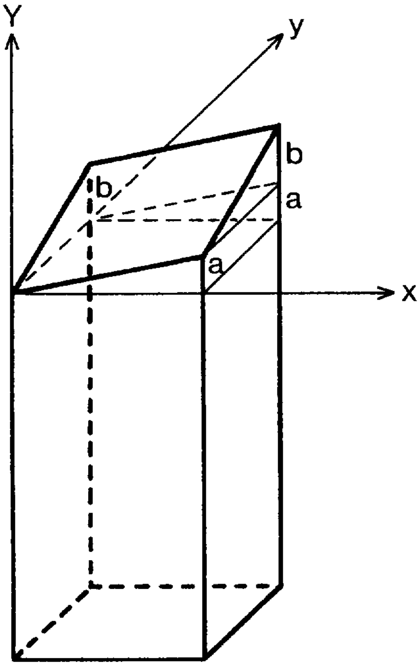

Fig.A1. Illustration of $Y = ax+by$.

$$Y = ax+by \tag{A.6}$$

で近似することである。この(A.6)式を正確にイメージできるかどうかが，理解の分岐点になると思われる。(A.6)式は3次元空間(x,y,Y)において原点(0,0,0)を通る平面を意味している。斜めにスパッと切断された角材をイメージするとよい(**Fig.A1.**)。以上の議論より2変数関数(A.5)の微分は

$$\mathrm{d}Y = f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y \tag{A.7}$$

と書くことができる。ここでf'_xは$\mathrm{d}y=0$のときの$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$，f'_yは$\mathrm{d}x=0$のときの$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}y$であるが，これらの「条件付き微係数」を「偏微係数」と呼んで区別し，$\partial f/\partial x$および$\partial f/\partial y$と書く。したがって上式は一般に

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{A.8}$$

と表現され，これを「全微分」と呼ぶ。この関数の極値問題は1変数の場合と同様で，$\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$を満たす$(x,y)$を求めればよい。つまり$\mathrm{d}x$および$\mathrm{d}y$がどのように動こうとも常に$\mathrm{d}Y=0$となる点を求めるわけである。3変数以上についても同様で，3変数関数

$$Y = f(x,y,z) \tag{A.9}$$

の全微分は

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{A.10}$$

である。

微係数の定義式(A.4)は変数xだけを動かして計算することを意味しているが，これより偏微係数と本来の微係数には本質的な差はないことがわかる。たとえば関数$Y = ax + by$を考えてみると$\partial Y/\partial x = a$であるが，$y$が定数の場合には$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x = a$と表すことになる。また$y$が$x$の関数となる$y = y(x)$の場合にも(A.8)式は適用できて，この場合には合成関数の微分公式を用いて，

$$\mathrm{d}Y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \tag{A.11}$$

と表すことができる。

停留条件で求めた値は極値の候補であって(必要条件)，本当に極値であるかどうかは前後の状態で判断するしかない(十分条件，通常は２階微分の値で判定できる)。極値でない場合としては停留点や鞍点(馬の鞍あるいは峠のような図形，ミニ・マックス点)がある。また一般に「極値 = 最大(小)値」とは限らないが，ここで扱う問題の範囲内では同一とみなしてよい。なお関数fの最小値は関数$(-f)$の最大値なので，以下ではすべて最大値に統一して解説することにする。

B．ラグランジュの未定乗数法

２変数関数(A.5)の極値問題は前節で述べた通りである。ここではこれに

$$g(x, y) = k \tag{B.1}$$

という拘束条件が付いた場合の極値問題を考えよう。kはxやyに無関係な定数である。最初に代入法による解法を示そう。(B.1)式よりyはxとkの関数となるので，

$$y = y(x, k) \tag{B.2}$$

と表せる。kは定数だから，xだけの関数と考えてよい。したがって(B.1)式の両辺をxで微分すると合成関数の微分公式より，

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{B.3}$$

となる。一方，関数Yもxだけの関数となり，解において極値をとるので，xで微分すると0となるはずだから，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{B.4}$$

となる。この２式から$\partial y/\partial x$を消去して変形すれば，

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial g}{\partial y} = -\lambda \tag{B.5}$$

とおくことができる。ここで「$-\lambda$」とおいたのは以下の「定式化」のためである。

ラグランジュの未定乗数法はこの問題を，

$$f^*(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\{g(x,y) - k\} \tag{B.6}$$

とおいて，

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \tag{B.8}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = g(x,y) - k = 0 \tag{B.9}$$

を連立して x, y, λ について解く方法である。(B.7)および(B.8)式は(B.5)式と同一であり，(B.9)式は拘束条件(B.1)そのものである。この方法は条件付き極値問題を条件のない通常の極値問題に変換しているのであるが，変数や付帯条件が多い場合には威力を発揮する。定数 λ は最初は値がわからないため未定乗数と呼ばれている。

以上で未定乗数法を導くことができたが，ここでこの方法の幾何学的イメージを考えてみよう。(B.5)式はベクトル表示で，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \tag{B.10}$$

と書くことができる。この式は f の(x,y)平面に平行な等高線の法線ベクトルが，曲線 $g = k$ の法線ベクトルと平行であることを意味している。これは両者の接線が一致することと解釈してもよい。λ は2つの法線ベクトルの長さの比である。このとき曲線 $g = k$ 上において f は極値をとる。これは3次元空間(x,y,Y)における曲面(A.5)式と曲線(B.1)式が具体的にイメージできないと理解しにくいが，**Fig.A2.** に模式図を示すので，この図を眺めて理解してほしい。

未定乗数法は他にもいろいろ解釈が可能であり，未定乗数 λ の意味についても同様である。なかでも行列の固有値という解釈(篠崎ら,1991)は重要なので，記号としては λ を用いるのがよい。蛇足であるが非線型最適化手法の代表格であるマルカール法の調整因子 λ についても同様の解釈が可能なので λ を用いるのがよい(赤嶺,1995a)。なお未定乗数法の数学的に厳密な解説については，たとえば森(1966)を参照されたい(この本は数年前に日本評論社より復刻されている)。

C．部分積分と部分和分

部分積分は応用上もっとも重要な積分公式である。たとえばテイラー展開なども部分積分を機械的に反復することによって簡単に得ることができる(一松,1990)。部分積分は積の微分公式

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{C.1}$$

を

$$f'g = (fg)' - fg' \tag{C.2}$$

と変形し，両辺を積分して

$$\int_0^T f'g\mathrm{d}t = [fg]_0^T - \int_0^T fg'\mathrm{d}t \tag{C.3}$$

のように得ることができる。

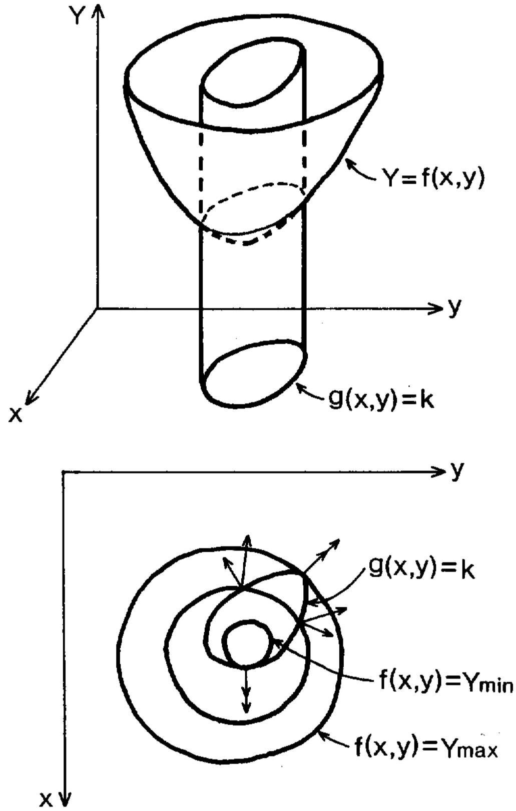

Fig.A2. Illustration of Lagrange's indeterminate multiplier method.

離散モデルにおいて部分積分と同等の公式が部分和分であるが，同様の方法で導いてみよう。まず差分を

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \tag{C.4}$$

と定義する。これは微係数の定義式(A.4)において$h=1$と固定したものである。これを積について行うと，

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x+1)g(x+1)-f(x)g(x)\\ &= \{\Delta f(x)\}g(x+1)+f(x)\{\Delta g(x)\}\end{aligned} \tag{C.5}$$

となる。右辺第1項のgの変数が$(x+1)$となることに注意する必要がある。これより両辺を和分して部分和分公式

$$\sum_a^b\{\Delta f(x)\}g(x)=[f(x)g(x-1)]_a^{b+1}-\sum_a^b f(x)\{\Delta g(x-1)\} \tag{C.6}$$

を得る。右辺第1項の上限が$(b+1)$となること，および右辺のgの変数が$(x-1)$となることに注意してほしい。

実はこの公式は自明な関係式である。(C.6)式で説明すると，変数を添字で表して，

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^b(f_{k+1}-f_k)g_k &= (f_{a+1}-f_a)g_a+(f_{a+2}-f_{a+1})g_{a+1}+\cdots+(f_{b+1}-f_b)g_b\\ &= -f_ag_a+f_{a+1}(g_a-g_{a+1})+\cdots+f_b(g_{b-1}-g_b)+f_{b+1}g_b\\ &= f_{b+1}g_b-f_ag_{a-1}-\sum_{k=a}^b f_k(g_k-g_{k-1})\end{aligned} \tag{C.7}$$

となっている。gでくくった多項式を，fでくくり直しただけである。この式において区間幅を縮小していけば，部分積分も自然に導くことができる。

D．変分法の基礎

微分法では極値を与えるxの数値を求めたが，変分法では極値を与える関数$x(t)$の形を決定する。具体的には積分

$$Y(x)=\int_0^T f(x,x')\mathrm{d}t \tag{D.1}$$

を最大にする関数$x(t)$を求めるのである。ここで$x'=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$であるが，力学では$x$が位置を表すので，$x'$は速度を意味する。関数$x(t)$を微妙に変化させた時の$x$の増分を$\delta x$，$Y$の増分を$\delta Y$と表そう(本文中のデルタ関数と混同しないように)。$\mathrm{d}x$と表さないのはまったく意味が異なるからで，これらを「変分」と呼ぶ。横軸にtを，縦軸にxをとって関数$x(t)$のグラフを考えてみよう。両端$(t=0,\ t=T)$を固定してxを縦方向に少し動かしてみる。このときの縦軸方向の変異がδxである。なお横軸(時間軸)方向の変異が$\mathrm{d}x$である。琴の弦をイメージするとよいだろう。またはトーストにバターを塗るイメージでもよい。バターの厚さがδxである。厳密には

$$\eta(0)=\eta(T)=0 \tag{D.2}$$

を満たす任意の関数$\eta(t)$を考えて，

$$\delta x(t) = \alpha\ \eta\ (t) \tag{D.3}$$

とおいたものである。$\alpha \to 0$のとき$\delta x \to 0$となるので，微分と同じように扱えることがわかる。変分については最後に解説する離散型最大原理でイメージがより明確に把握できるだろう。

ここでx'を(A.5)式におけるyと同様にxと独立な変数とみなす。両者が独立でないのは$x(t) = Ae^{kt}$という特殊な場合だけなので除外して考える。xがδxだけ動いたとき，x'もこれとは独立に$\delta x'$だけ動くので，(A.8)式を適用すると，

$$\delta Y = \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial x'}\ \delta x' \right) \mathrm{d}t \tag{D.4}$$

となる。このままでは何もできないが，ここでxとx'の関係を用いる。(D.3)式より$\partial(\delta x)/\partial t = \delta x'$となるので，これを用いて(D.4)式の右辺第2項を部分積分するのである。(D.4)式の右辺第2項において$\delta x'$，$\partial f / \partial x'$をそれぞれ(C.3)式のf'，gとして部分積分を行うと，$\delta x(0) = \delta x(T) = 0$なので(C.3)式の右辺第1項は0となる。したがって(D.4)式は

$$\delta Y = \int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \delta x \right\} \mathrm{d}t \tag{D.5}$$

のようにδxでくくることができる。

ここで(D.5)式を検討してみよう。δxは任意の関数なのでどのように変化してもよい。Yが極値であればδxがどのように変化しても常に$\delta Y = 0$となるはずである(停留条件)。(D.5)式の積分において常に$\delta Y = 0$が成立するためには，

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \tag{D.6}$$

でなければならない。これは2階微分方程式で「オイラーの(微分)方程式」と呼ばれている。この方程式を満足する関数$x(t)$が求める関数である。$x(t)$の両端が固定されている単純な場合には，

$$x(0) = c_1,\ \ x(T) = c_2 \tag{D.7}$$

と表されるが，これらを「境界条件」と呼ぶ。2階微分方程式を解くには積分を2回行う必要があるが，それによって生じる2個の積分定数はこの2つの境界条件から決定することができる。

ここでひとつだけ注意しておくと，変分法では解が定義の範囲外に存在する場合がある。たとえば同一直線上にない3点を結ぶ滑らかな曲線を考え，これらの中で距離が最短のものを求めてみる。答は明らかに3点を結ぶ折れ線であるが，これは滑らかな曲線ではない。つまり正解が定義の範囲外に存在しているのである。最適制御問題の場合も同様に注意する必要がある。

E．拘束条件付き変分法

ここで拘束条件の付いた変分法について検討する。拘束条件としては微分方程式・代数方程式・積分方程式の3通りがあるが，最大原理と関係のある微分方程式の場合についてのみ検討

する。目的関数は(D.1)式のままであるが，これに

$$g(x,x')=0 \tag{E.1}$$

という微分方程式を拘束条件として追加するのである。これは未定乗数法を適用すれば簡単に解ける。

$$f^*(x,\lambda)=f(x,x')+\lambda g(x,x') \tag{E.2}$$

とおけばよい。ここで未定乗数 λ は x や x' と同様に t の関数である。f^* は変数が x と λ の2つだから，オイラーの方程式は2つ導けて，

$$\frac{\partial f^*}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial f^*}{\partial x'}=0 \tag{E.3}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^*}{\partial \lambda'}=0 \tag{E.4}$$

を得る。ここで $\partial f^*/\partial \lambda'=0$ だから，(E.4)式は $\partial f^*/\partial \lambda=g=0$ となるが，これは(E.1)式そのものである。

次にこれを最適制御問題に拡張しよう。新たに制御変数として u を追加して，

$$x'=F(x,u) \tag{E.5}$$

という微分方程式の拘束条件下において，

$$Y(u)=\int_0^T L(x,u)\mathrm{d}t \tag{E.6}$$

という目的関数を最大にする問題である。ここでxを状態変数(または環境変数)と呼ぶ。(E.2)式と同様にして，

$$L^*(x,u,\lambda)=L(x,u)+\lambda\{F(x,u)-x'\} \tag{E.7}$$

とおくと，オイラーの方程式が3つ導けて，

$$\frac{\partial L^*}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial x'}=0 \tag{E.8}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial u'}=0 \tag{E.9}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \lambda'}=0 \tag{E.10}$$

を得る。ここで $\partial L^*/\partial x'=-\lambda$，$\partial L^*/\partial u'=0$，$\partial L^*/\partial \lambda'=0$ だから，(E.8)～(E.10)式はそれぞれ，

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial}{\partial x}(L+\lambda F) \tag{E.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(L+\lambda F)=0 \tag{E.12}$$

$$x'=F \tag{E.13}$$

となる。

これをハミルトン関数(Hamiltonian)を用いて簡潔に表現しよう。ハミルトン関数は

$$H(x,u,\lambda)=L(x,u)+\lambda F(x,u) \tag{E.14}$$

で定義されるが，これを用いると(E,11)～(E,13)式はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{E.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{E.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{E.17}$$

となる。

未定乗数 $\lambda(t)$ は随伴変数(adjoint variable)と呼ばれ，その微分方程式(E.15)は随伴方程式と呼ばれている。(E.17)式は拘束条件(E.5)だから，随伴方程式(E.15)を解きさえすれば，後はハミルトン関数 H を制御変数 u だけの関数とみなして(E.16)式を満たすように制御方法を考えればよい。状態変数 x の影響を随伴変数 λ が打ち消してくれるからである。これは(E.15)式の x と λ を交換して符号を変えれば(E.17)式となることから明らかで，H を x と λ だけの関数とみて t で微分すると両式より，

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0 \tag{E.18}$$

となる。解析力学では運動エネルギーとポテンシャル(位置)エネルギーを加えた力学的全エネルギーをハミルトニアンと呼んでいるが，ハミルトニアンは(E.15)および(E.17)式とまったく同型の正準方程式を満たしている。

ところで今までは x の両端の点を固定して考えてきたが，片方の端または両端を自由にしても，つまり

$$\delta y(0)\neq 0 \quad \text{and/or} \quad \delta y(T)\neq 0 \tag{E.19}$$

としても以上の条件は同様に成立する。ただしこの場合には無視してきた定数項

$$\lambda(T)y(T)-\lambda(0)y(0)$$

が

$$\lambda(T)\delta y(T)-\lambda(0)\delta y(0)$$

として影響してくる。したがってこの場合には

$$\lambda(0) = 0 \quad \text{and/or} \quad \lambda(T) = 0 \tag{E.20}$$

という条件が必要になる。変分法では境界条件を一般化した様々な「横断条件」が提供されているが，それらについての詳細な解説は加藤(1988)や篠崎ら(1991)を参照されたい。前者は実に明解な本であるがベクトル形式で書かれているので初心者には難しいかもしれない。後者は対話形式で初心者にもわかりやすく書かれている。

F．ポントリャーギンの最大原理

(E.16)式では制御変数uには何の制限もないが，通常は$u^{\min} \leqq u \leqq u^{\max}$のような不等式拘束条件が付いている場合が多い。そのような場合にはuの解は切り替え関数となることが多く(バンバン制御)，変分法の(E.16)式では対応できない。そのような場合にも対応できるように拡張されたのがポントリャーギンの最大原理で，この原理によればすべてのtにおいて

$$H(u) \leqq H(u^{\circ}) \tag{F.1}$$

となるu°が存在すれば，そのu°が求める関数である。これは積分の意味を考えれば明白だろう。ポントリャーギンらの原著は名著といわれ既に英訳および和訳が出版されているが，斎藤(1965)によれば相当に難しく「数学に相当の年季を入れた方以外は，敬遠された方が無難であろう」とのことである。

G．離散型最大原理

前節までに解説したのは連続モデルについての最大原理であるが，離散モデルについても同様の原理が適用でき，離散型最大原理と呼ばれている。これは連立方程式を用いて簡単に導くことができるが(Clark,1976)，ここでは前節までと同じ道筋で導くことにする。離散型と連続型を比較することによって，両者の理解がより深まるからである。

離散型の目的関数と拘束条件は

$$Y(u) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,\ u_k) \tag{G.1}$$

$$x_{k+1} - x_k = g(x_k,\ u_k) \tag{G.2}$$

で与えられる。連続型と比較すると積分が和分に，微分方程式が差分方程式に変更されただけである。したがって以下は前節とまったく同様の道筋である。まず

$$Y^*(u) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_k + \lambda_k \{ g_k - (x_{k+1} - x_k) \} \right] \tag{G.3}$$

とおいて，さらにハミルトン関数を

$$H_k = f_k + \lambda_k g_k \tag{G.4}$$

と定義する。ここで(G.3)式の右辺第3項を部分和分する。(C.7)式より，

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_{k+1} - x_k) = \lambda_n x_{n+1} - \lambda_0 x_1 - \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \tag{G.5}$$

となる。最後の式の右辺第 1 , 2 項は定数である。(G.3)～(G.5)式を考慮して変分を考えると

$$\delta Y^* = \sum_{k=1}^{n} \{ (\frac{\partial H_k}{\partial x_k} + \lambda_k - \lambda_{k-1}) \delta x_k + \frac{\partial H_k}{\partial u_k} \delta u_k + (\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_k} - x_{k+1} + x_k) \delta \lambda_k \} \tag{G.6}$$

となるから，常に $\delta Y^* = 0$ となる条件は，

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = - \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{G.7}$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0 \tag{G.8}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_k} \tag{G.9}$$

である。(G.7)式では左辺の差分で k が1だけ減っていることに注意する必要がある。(G.9)式は拘束条件(G.2)そのものである。(G.8)式が最大原理を意味している。