屈折した需要及び供給に関する空間的価格決定と財の配分方法

誌名	農林業問題研究
ISSN	03888525
著者	大西, 治男
巻/号	10巻1号
掲載ページ	p. 26-32
発行年月	1974年6月

屈折した需要及び供給に関する空間的価格決定と財の配分方法

——単一財の場合——

大 西 治 男

1920年，A. マーシャルは需要関数の下の面積から消費者によって支払われた額を差し引いたものを，消費者余剰と名付けて経済学に導入した（Dupuit, 1844年）．これは，生産者余剰という概念を引き出し，両者を合わせて経済余剰と呼ばれるようになった．P. A. サミュエルソンは，経済余剰と結びついたソーシャル・ペイオフ（social payoff）を空間的な財の配分問題に導入した． T. 高山と G. G. ジャッジは，需要や供給が一次の関数で表わされる場合の，空間及び時間に関する価格決定と資源配分モデルを示わした．

この論文は，単一財の需要や供給が，曲線で表わされる場合とか，屈折している場合に使用できる（workable）価格決定と財の配分のモデルを導入し，数式が経済学的に説明できることを示すことを目的としている．一つの例題を挙げて，実際にこのモデルが使用できることも示される．

1. 記号と基本的な仮定

次のような経済環境を想定しよう．Jの異なった地域又は国が，単一財を生産し，交易し，また消費する．各地域の非増加需要及び非減少供給曲線は，それぞれの直線群によって適当に近似される．経済学的な興味は，すべての地域の最適な（又は最適に近い）市場需要及び供給価格，最適な需要及び供給量，そして最適な貿易量を見つけ出すことである．

モデルを理解しやすくする為に，次の記号を導入しよう．

j 又は i ……第 j 番目又は第 i 番目の地域（又は国）を表わす．ここで，$j, i = 1, 2, \cdots\cdots, J$．

n_j……直線群で近似された地域 j の需要関数において，価格軸（y 軸）から数えて第 n_j 番目にある屈折点を表わす．ここで，$n_j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, N_j$ で，$N_j = 0$ は点の数がゼロであることを表わし，需要関数が唯一つの直線であることを意味し，価格軸との交点を指す．

m_j ……直線群で近似された地域 j の供給関数において，価格軸から数えて第 m_j 番目にある屈折点を表わす．ここで，$m_j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, M_j$ とし，$M_j = 0$ は供給関数が唯一つの直線であることを意味し，価格軸との交点を指す．

$\hat{q}^d_{jn_j}$ 及び $\hat{q}^s_{jm_j}$ ……地域 j の需要及び供給関数のそれぞれ第 n_j 及び m_j 番目の屈折点の需要及び供給量を表わす．ここで，$0 \equiv \hat{q}^d_{j0} < \hat{q}^d_{j1} < \hat{q}^d_{j2} < \cdots\cdots < \hat{q}^d_{jN_j}$ と $0 \equiv \hat{q}^s_{j0} < \hat{q}^s_{j1} < \hat{q}^s_{j2} < \cdots\cdots < \hat{q}^s_{jM_j}$ と仮定する．

$\hat{p}^d_{jn_j}$ 及び $\hat{p}^s_{jm_j}$ ……上述の $\hat{q}^d_{jn_j}$ 及び $\hat{q}^s_{jm_j}$ と関連した市場需要及び供給価格を表わす．ここで，$b_{j0} \equiv \hat{p}^d_{j0} \geqq \hat{p}^d_{j1} \geqq \hat{p}^d_{j2} \geqq \cdots\cdots \geqq \hat{p}^d_{jN_j-1} > \hat{p}^d_{jN_j}$. ただしもし $n_j \neq N_j-2, N_j-1, N_j$ ならば，$\hat{p}^d_{jn_j} > \hat{p}^d_{jn_j+2}$ とする．他方，$e_{j0} \equiv \hat{p}^s_{j0} \leqq \hat{p}^s_{j1} \leqq \hat{p}^s_{j2} \leqq \cdots\cdots \leqq \hat{p}^s_{jM_j-1} < \hat{p}^s_{jM_j}$. ただしもし $m_j \neq M_j-2$, M_j-1, M_j ならば，$\hat{p}^s_{jm_j} < \hat{p}^s_{jm_j+2}$ とする．即ち三つの屈折点が一直線上にないことを仮定している．

q^d_j 及び q^s_j ……地域 j の総需要及び総供給量を表わす．

p^d_j 及び p^s_j ……地域 j の市場需要及び供給価格を表わす．p^d_j と q^d_j との間及び p^s_j と q^s_j との間には，次のような関係がある．

もし $n_j \neq N_j$ に対して，$\hat{q}^d_{jn_j+1} \geqq q^d_j \geqq \hat{q}^d_{jn_j}$ ならば，$p^d_j = b_{jn_j} - a_{jn_j} q^d_j \equiv f^d_{jn_j}(q^d_j)$. もし $q^d_j > \hat{q}^d_{jN_j}$ ならば，$p^d_j = b_{jN_j} - a_{jN_j} q^d_j \equiv f^d_{jN_j}(q^d_j)$. 他方，もし $m_j \neq M_j$ に対して，$\hat{q}^s_{jm_j+1} \geqq q^s_{jm_j} \geqq \hat{q}^s_{jm_j}$ ならば，

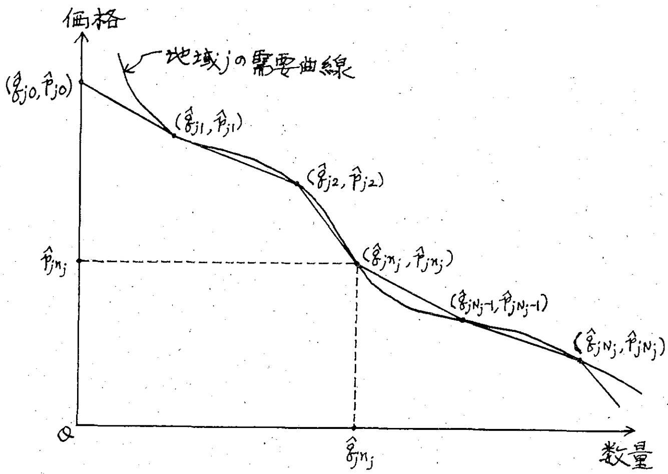

図1. 地域jの需要曲線と直線群によって代替された需要

$p^s_j = e_{jm_j} + c_{jm_j} q^s_j \equiv f^s_{jm_j}(q^s_j)$. もし $q^s_j > \hat{q}^s_{jM_j}$ ならば，$p^s_j = e_{jM_j} + c_{jM_j} q^s_j \equiv f^s_{jM_j}(q^s_j)$. なお次の仮定をもうける． $b_{jn_j} > 0$, $a_{jn_j} \geqq 0$, $a_{jn_j-1} \fallingdotseq a_{jn_j}$ $(n_j \fallingdotseq 0)$, $e_{jm_j} \gtreqless 0$, $c_{jm_j-1} \fallingdotseq c_{jm_j}$ $(m_j \fallingdotseq 0)$, $f^d_{jn_j}(\hat{q}^d_{jn_j+1}) = f^d_{jn_j+1}(\hat{q}^d_{jn_j})$ $(n_j \fallingdotseq N_j)$，そして $f^s_{jm_j}(\hat{q}^s_{jm_j+1}) = f^s_{jm_j+1}(\hat{q}^s_{jm_j})$ $(m_j \fallingdotseq M_j)$.

$q^d_{jn_j}$ 及び $q^s_{jm_j}$ …… 分割された追加的な需要及び供給量を表わし，次のように定義する．
$\hat{q}^d_{jn_j+1} - \hat{q}^d_{jn_j} \geqq q^d_{jn_j} \geqq 0$ $(n_j \fallingdotseq N_j)$, $q^d_{jN_j} \geqq 0$,
$\hat{q}^s_{jm_j+1} - \hat{q}^s_{jm_j} \geqq q^s_{jm_j} \geqq 0$ $(m_j \fallingdotseq M_j)$, $q^s_{jM_j} \geqq 0$.

$p^d_{jn_j}$ 及び $p^s_{jm_j}$ …… 地域 j の市場需要及び供給価格で，次の関係を満たす． $p^d_{jn_j} = f^d_{jn_j}(\hat{q}^d_{jn_j} + q^d_{jn_j}) = (b_{jn_j} - a_{jn_j}\hat{q}^d_{jn_j}) - a_{jn_j} q^d_{jn_j}$, $p^s_{jm_j} = f^s_{jm_j}(\hat{q}^s_{jm_j} + q^s_{jm_j}) = (e_{jm_j} + c_{jm_j}\hat{q}^s_{jm_j}) + c_{jm_j} q^s_{jm_j}$.

ρ^d_j 及び ρ^s_j …… 地域 j のシャドウ需要及び供給価格 (shadow demand and supply prices) で，需要＝輸入量及び供給＝輸出量条件式のラグランジュ乗数 (Lagrangean multiplier) である．

$\lambda^d_{jn_j}$ ………地域 j の需要を $\hat{q}^d_{jn_j}$ から $q^d_j - \hat{q}^d_{jn_j} (\geqq 0)$ だけ増加させる為に，供給者によって支払われる様に見られるシャドウ補助金で，$\hat{q}^d_{jn_j+1} - \hat{q}^d_{jn_j} \geqq q^d_{jn_j}$ のラグランジュ乗数にあたる．ここで，$n_j \fallingdotseq N_j$ である．

$\lambda^s_{jm_j}$ ………地域 j の供給を $\hat{q}^s_{jm_j}$ から $q^s_j - \hat{q}^s_{jm_j} (\geqq 0)$ だけ増加させる為に，需要者によって支払われる様に見られるシャドウ補助金で，$\hat{q}^s_{jm_j+1} - \hat{q}^s_{jm_j} \geqq q^s_{jm_j}$ のラグランジュ乗数にあたる． ここで，$m_j \fallingdotseq M_j$ である．

z_{ij} ……… 地域 i から地域 j への貿易量で，z_{jj} は地域 j 内で販われる量である．

t^1_{ij} ……… 地域 i から地域 j へ財が移動させられる場合の，単位当りの輸送費(一定)を表わす．

t^2_{ij} ……… 地域 i から地域 j へ商品が移動させられる場合の，純税率又は純補助金率（一定）である．

ここで更に次の仮定をする．

A．総輸入量が総需要量を超過することは可能である．即ち，数学的には，すべての j について

$$\sum_{i=1}^{J} z_{ij} \geqq q^d_j \equiv \sum_{n_j=0}^{N_j} q^d_{jn_j} \ .$$

B．総供給量が総輸出量を超過することは可能である．即ち，数学的には，すべての j について

$$q^s_j \equiv \sum_{m_j=0}^{M_j} q^s_{jm_j} \geqq \sum_{i=1}^{J} z_{ji} \ .$$

C．商品の処分は，何の費用も用しない．もし $\sum_i z_{ij} > q^d_j$ ならば，需要者（消費者）は $\sum_i z_{ij} - q^d_j (> 0)$ 量を消費せず，無費用で廃棄処分できる．またもし $q^s_j > \sum_i z_{ji}$ ならば，供給者(生産者)は，$q^s_j - \sum_i z_{ji} (> 0)$ 量を供給せず，無費用で廃棄処分できる．

D．経済活動は確実性(certainty) の下で行われる．

E．自由競争を仮定する．

F．輸送能力は，無制限である．

2．空間的価格決定と配分問題

我々は，各地域の需要及び供給価格を決定し，地域間に財を配分する問題を述べる用意ができている．最大化させられる目的関数は，純経済余剰で，次のように定義される．

$$\pi = \sum_{j=1}^{J}\sum_{n_j=0}^{N_j}\int_0^{q^d_{jn_j}}\left\{(b_{jn_j} - a_{jn_j}\,\hat{q}^d_{jn_j}) - a_{jn_j}\,q^d_{jn_j}\right\}\times dq^d_{jn_j}$$
$$-\sum_{j=1}^{J}\sum_{m_j=0}^{M_j}\int_0^{q^s_{jm_j}}\left\{(e_{jm_j}+c_{jm_j}\hat{q}^s_{jm_j})+c_{jm_j}q^s_{jm_j}\right\}\times dq^s_{jm_j}$$
$$-\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J}(t^1_{ij}+t^2_{ij})\,z_{ij}.$$

π は次の条件を満たす範囲内で，$q^d_{jn_j}$，$q^s_{jm_j}$ と z_{ij} に関して最大化させられる：

(2.1)　すべての j について $\sum_{i=1}^{J} z_{ij} \geqq \sum_{n_j=0}^{N_j} q^d_{jn_j}$

(2.2)　すべての j について $\sum_{m_j=0}^{M_j} q^s_{jm_j} \geqq \sum_{i=1}^{J} z_{ji}$

(2.3)　すべての j と n_j ($\neq N_j$) について

$\hat{q}^d_{jn_j+1} - \hat{q}^d_{jn_j} \geqq q^d_{jn_j} \geqq 0$

(2.4)　すべての j と m_j ($\neq M_j$) について

$\hat{q}^s_{jm_j+1} - \hat{q}^s_{jm_j} \geqq q^s_{jm_j} \geqq 0$

(2.5)　すべての i，j，N_j 及び M_j について

$z_{ij} \geqq 0$，$q^d_{jN_j} \geqq 0$，$q^s_{jM_j} \geqq 0$

3．最適解とその解の首尾一貫性 (consistency)

上述の問題は，鞍点値の問題(saddle value problem)[1] に変換して解かれる．ラグランジュ形は次のように書ける．

$$\phi = \pi + \sum_j \rho^d_j\left(\sum_i z_{ij} - \sum_{n_j} q^d_{jn_j}\right) + \sum_j \rho^s_j \times \left(\sum_{m_j} q^s_{jm_j} - \sum_i z_{ji}\right)$$
$$+\sum_j\sum_{n_j\neq N_j} \lambda^d_{jn_j}(\hat{q}^d_{jn_j+1} - \hat{q}^d_{jn_j} - q^d_{jn_j})$$
$$+\sum_j\sum_{m_j\neq M_j} \lambda^s_{jm_j}(\hat{q}^s_{jm_j+1} - \hat{q}^s_{jm_j} - q^s_{jm_j}).$$

この鞍点値問題を解くことは，ϕ の鞍点となる($\bar{q}^d_{jn_j}$，$\bar{q}^s_{jm_j}$，$\bar{z}_{ij}$，$\bar{\rho}^d_j$，$\bar{\rho}^s_j$，$\bar{\lambda}^d_{jn_j}$，$\bar{\lambda}^s_{jm_j}$) を求めることである．適当な操作により，クーン=タッカー (Kuhn=Tucker) 最適条件式は次のように求められる．

(3.1) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial q^d_{jn_j}} = \bar{p}^d_{jn_j} - \bar{\rho}^d_j - \bar{\lambda}^d_{jn_j} \leqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial q^d_{jn_j}}\cdot\bar{q}^d_{jn_j} = 0,\quad \bar{q}^d_{jn_j} \geqq 0;$$

(3.2) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial q^s_{jm_j}} = -\bar{p}^s_{jm_j} + \bar{\rho}^s_j - \bar{\lambda}^s_{jm_j} \leqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial q^s_{jm_j}}\cdot\bar{q}^s_{jm_j} = 0,\quad \bar{q}^s_{jm_j} \geqq 0;$$

(3.3) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z_{ij}} = -(t^1_{ij}+t^2_{ij}) + \bar{\rho}^d_j - \bar{\rho}^s_i \leqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z_{ij}}\cdot\bar{z}_{ij} = 0,\quad \bar{z}_{ij} \geqq 0;$$

(3.4) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\rho^d_j} = \sum_i \bar{z}_{ij} - \sum_{n_j}\bar{q}^d_{jn_j} \geqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\rho^d_j}\cdot\bar{\rho}^d_j = 0,\quad \bar{\rho}^d_j \geqq 0;$$

(3.5) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\rho^s_j} = \sum_{m_j}\bar{q}^s_{jm_j} - \sum_i \bar{z}_{ji} \geqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\rho^s_j}\cdot\bar{\rho}^s_j = 0,\quad \bar{\rho}^s_j \geqq 0;$$

(3.6) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\lambda^d_{jn_j}} = \hat{q}^d_{jn_j+1} - \hat{q}^d_{jn_j} - \bar{q}^d_{jn_j} \geqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\lambda^d_{jn_j}}\cdot\bar{\lambda}^d_{jn_j} = 0,\quad \bar{\lambda}^d_{jn_j} \geqq 0;$$

(3.7) $$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\lambda^s_{jm_j}} = \hat{q}^s_{jm_j+1} - \hat{q}^s_{jm_j} - \bar{q}^s_{jm_j} \geqq 0,$$
$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\lambda^s_{jm_j}}\cdot\bar{\lambda}^s_{jm_j} = 0,\quad \bar{\lambda}^s_{jm_j} \geqq 0.$$

ここで，$\lambda^d_{jN_j}$ と $\lambda^s_{jM_j}$ とは，消去されるべきものである．

最適条件式 (3.1) から (3.7) を満たす $\bar{q}^d_{jn_j}$，$\bar{q}^s_{jm_j}$，$\bar{z}_{ij}$，$\bar{\rho}^d_j$，$\bar{\rho}^s_j$，$\bar{\lambda}^d_{jn_j}$ 及び $\bar{\lambda}^s_{jm_j}$ は，最適解である．制限条件 (2.1) から (2.5) は，スレィターの条件 (Slater's condition) を満たし，[数注]目的関数が，定義域内で連続であるから，解が存在することは分る．

次に最適解が首尾一貫性をもつかどうかを明らかにすることが重要である．ここで，首尾一貫性とは，次のことを意味する．各jについて，$\bar{q}^d_{jn_j}$ と $\bar{q}^s_{jm_j}$ の中で，$\bar{q}^d_{jn_j}$, $\bar{q}^s_{jm_j}>0$ なる n_j と m_j が存在すれば，その n_j と m_j の中で，最大のものをそれぞれ n_j^* と m_j^* とする．もし$n_j^*\geqq 1$ 又は $m_j^*\geqq 1$ ならば，すべての $u_j=0, 1, 2, \cdots\cdots, n_j^*-1$, $v_j=0, 1, 2, \cdots\cdots, m_j^*-1$ について，$\hat{q}^d_{ju_j+1}-\hat{q}^d_{ju_j}=\bar{q}^d_{ju_j}$ 及び $\hat{q}^s_{jv_j+1}-\hat{q}^s_{jv_j}=\bar{q}^s_{jv_j}$ が成立することである．もし $n_j^*=0$ 又は $m_j^*=0$ ならば，解は首尾一貫している．もしそのような n_j^* や m_j^* が存在しない場合，即ち，すべての n_j について，$\bar{q}^d_{jn_j}=0$, すべての m_j について，$\bar{q}^s_{jm_j}=0$ である場合，解はまた首尾一貫していると言える．

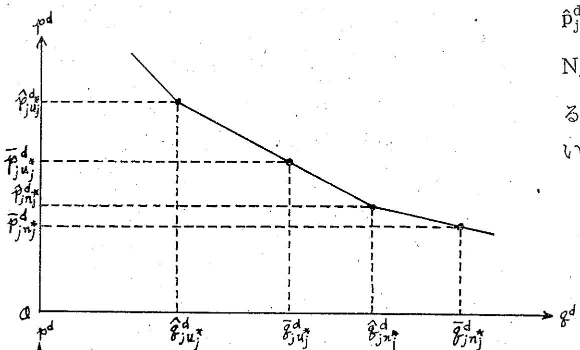

図2. $u_j^*=n_j^*-1$, $\hat{p}^d_{ju_j^*}>\bar{p}^d_{ju_j^*}$, $\hat{p}^d_{jn_j^*}>\bar{p}^d_{jn_j^*}$ の場合

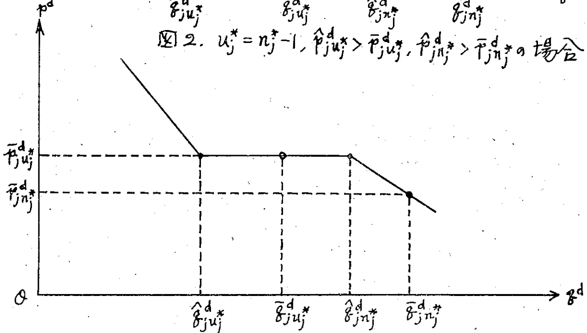

図3. $u_j^*=n_j^*-1$, $\hat{p}^d_{ju_j^*}=\bar{p}^d_{ju_j^*}$, $\hat{p}^d_{jn_j^*}>\bar{p}^d_{jn_j^*}$ の場合

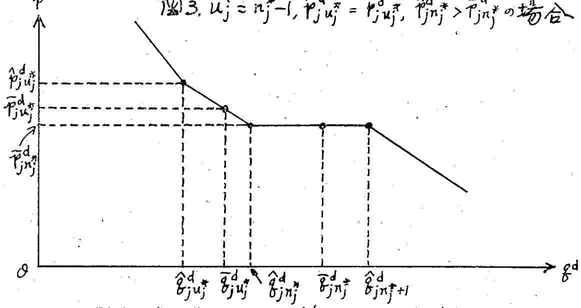

図4. $u_j^*=n_j^*-1, n_j^*\neq N_j$, $\hat{p}^d_{ju_j^*}>\bar{p}^d_{ju_j^*}$. $\hat{p}^d_{jn_j^*}=\bar{p}^d_{jn_j^*}$ の場合

最適解が，首尾一貫した解であることは，次のようにして証明される．今，需要側について $n_j^*\geqq 1$ としよう．u_jの中で少なくとも一つ，例えば $u_j^*(<n_j^*)$ において，$\hat{q}^d_{ju_j^*+1}-\hat{q}^d_{ju_j^*}>\bar{q}^d_{ju_j^*}\geqq 0$ と仮定しよう．(3.1) から，$\bar{p}^d_{ju_j^*}\leqq\bar{\rho}^d_j+\bar{\lambda}^d_{ju_j^*}$ 及び $\bar{p}^d_{jn_j^*}=\bar{\rho}^d_j+\bar{\lambda}^d_{jn_j^*}$ を得る．(3.6) から，$\bar{\lambda}^d_{ju_j^*}=0$ となり，$\bar{p}^d_{ju_j^*}\leqq\bar{\rho}^d_j\leqq\bar{\rho}^d_j+\bar{\lambda}^d_{jn_j^*}=\bar{p}^d_{jn_j^*}$ を得る．他方，仮定より $\hat{p}^d_{ju_j^*}\geqq\bar{p}^d_{ju_j^*}\geqq\hat{p}^d_{ju_j^*+1}$, $\hat{p}^d_{jn_j^*}\geqq\bar{p}^d_{jn_j^*}$ であり，且つ $\hat{p}^d_{jn_j}>\hat{p}^d_{jn_j+2}$ $(n_j\neq N_j-2, N_j-1, N_j)$, $\hat{p}^d_{jN_j-1}>\hat{p}^d_{jN_j}$ から，$\bar{p}^d_{ju_j^*}>\bar{p}^d_{jn_j^*}$ を得る．図2，図3，図4を参照すれば $u_j^*=n_j^*-1$ についてこのことは一目瞭然である．この事実は，クーン=タッカー最適条件式から求められた $\bar{p}^d_{ju_j^*}\leqq\bar{p}^d_{jn_j^*}$ と矛盾する．その結果，こういう場合は起らないことが分る．

もし，すべての $0\leqq u_j\leqq n_j^*$ について，$\hat{q}^d_{ju_j+1}-\hat{q}^d_{ju_j}=\bar{q}^d_{ju_j}$ であるならば，$\bar{p}^d_{j0}-\bar{\lambda}^d_{j0}=\bar{p}^d_{j1}-\bar{\lambda}^d_{j1}=\bar{p}^d_{j2}-\bar{\lambda}^d_{j2}=\cdots\cdots=\bar{p}^d_{jn_j^*}=\bar{\rho}^d_j\leqq\hat{p}^d_{jn_j^*}$ を得る．$\hat{p}^d_{j1}\geqq\hat{p}^d_{j2}\geqq\cdots\cdots\geqq\hat{p}^d_{jn_j^*}$, $\hat{p}^d_{jn_j}>\hat{p}^d_{jn_j+2}$ $(n_j\neq N_j-2, N_j-1, N_j)$, $\hat{p}^d_{jN_j-1}>\hat{p}^d_{jN_j}$ と仮定されているから $\bar{\lambda}^d_{j0}\geqq\bar{\lambda}^d_{j1}\geqq\cdots\cdots\geqq\bar{\lambda}^d_{jn_j^*-1}\geqq\bar{\lambda}^d_{jn_j^*}=0$, $\bar{\lambda}^d_{jn_j}>\bar{\lambda}^d_{jn_j+2}$ $(0\leqq n_j\leqq n_j^*-2)$（もし $n_j^*=N_j$ ならば，$\bar{\lambda}^d_{jN_j-1}>0$ である）が得られる．この場合，何ら矛盾が起らないから，最適解は首尾一貫性をもっていると言える．

これまで需要側についてのみ，最適解の首尾一貫性を述べてきたが，このことは供給側についても同じように証明される．それ故に，クーン=タッカー最適条件式を満たす解は，最適で且つ首尾一貫性をもっていると結論できる．

4. クーン=カッター最適条件式の経済学的意味

数式を経済学的に説明することは，重要であ

る．(3.1) から (3.7) に経済学的な意味付けをしよう．上述の首尾一貫性の証明で明らかなように，$\{0, 1, 2, \cdots, n_j^*-1\}$，$\{n_j^*\}$ と $\{n_j^*+1, n_j^*+2, \cdots\cdots, N_j\}$ に n_j を区別して説明すれば十分である．まず初めに，第 n_j^* 番目の追加的な需要量 $\bar{q}_{jn_j^*}^d$ について説明しよう．この追加的な需要量は正だから，この追加的な需要量によって決まる需要価格 $\bar{p}_{jn_j^*}^d$ が，均衡市場需要価格となり，均衡シャドウ需要価格 $\bar{\rho}_j^d$ と等しくなる．なお，$\bar{\lambda}_{jn_j^*}^d$ は，常にゼロである．n_j^* より小さい番号の追加的な需要量 $\bar{q}_{ju_j}^d$ は，常にその上限の $\hat{q}_{ju_j+1}^d-\hat{q}_{ju_j}^d$ に等しくなる．このときの需要価格 $\bar{p}_{ju_j}^d(=\hat{p}_{ju_j+1}^d)$ は，均衡シャドウ需要価格と供給者から需要者へ支払われていると見なせる均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}_{ju_j}^d$ との和に等しくなる．このシャドウ補助金は，需要を $\hat{q}_{ju_j+1}^d$ から $\hat{q}_{jn_j^*}^d+\bar{q}_{jn_j^*}^d$ まで増加を促すように，供給者から需要者へ支払われていると見なせる（実際には支払われていないが）一種の補助金のようなものである．n_j^* より大きな番号が存在すれば，そのような番号をもった追加的な需要量はゼロとなる．もし n_j^* が存在しないならば，均衡シャドウ需要価格は，直線群で代替された需要曲線から得られる価格軸上の切片 b_{j0} より大きいか，少なくとも等しくなければならない．

供給条件についても同じように説明される．第 m_j^* $(\geqq 1)$ 番目の追加的な供給量 $\bar{q}_{jm_j^*}^s$ は正であるから，この追加的な供給量によって決まる供給価格 $\bar{p}_{jm_j^*}^s$ が，均衡市場供給価格となり，均衡シャドウ供給価格 $\bar{\rho}_j^s$ と等しくなる．　m_j^* より小さい番号の追加的な供給量 $\bar{q}_{jv_j}^s$ は，常にその上限の $\hat{q}_{jv_j+1}^s-\hat{q}_{jv_j}^s$ に等しくなければならない．このときの供給価格 $\bar{p}_{jv_j}^s(=\hat{p}_{jv_j+1}^s)$ は，均衡シャドウ供給価格から，需要者から供給者へ支払われたように見られる均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}_{jv_j}^s$ を差し引いたものに等しくなくてはならない．このシャドウ補助金は，供給を $\hat{q}_{jv_j}^s$ から $\hat{q}_{jm_j^*}^s+\bar{q}_{jm_j^*}^s$ まで増加を促すように，需要者から供給者へ支払われたように見られる単位当りの補助金である．m_j^* より大きい番号が存在すれば，そのような番号をもった追加的な供給量はゼロとなる．もし m_j^* が存在しなければ，均衡シャドウ供給価格は，直線群で代替された供給曲線から得られる価格軸上の切片 e_{j0} より小さいか，高々等しくなくてはならない．

(3.3) は次のような経済学的な意味をもつ．もし地域 i から地域 j への均衡貿易量，$\bar{z}_{ij}$，が正であれば，地域 i の均衡シャドウ供給価格と地域 i と j との間の交易費用 $(t_{ij}^1+t_{ij}^2)$ との和は，地域 j の均衡シャドウ需要価格に正確に等しくなければならない．もし地域 i の均衡シャドウ供給価格と地域 i と j との間の交易費用との和が，地域 j の均衡シャドウ需要価格より大きければ，地域 i と j との間の貿易量は，ゼロでなければならない．

(3.4) より，地域 j への総輸入量 $\sum_i \bar{z}_{ij}$ が，同地域の総需要量 $\sum_{n_j} \bar{q}_{jn_j}^d$ より大きければ，均衡シャドウ需要価格はゼロでなければならないことが分る．また，総輸入量が総需要量に等しければ，均衡シャドウ需要価格は非負で正となりうる．

(3.5) の説明は次のようである．地域 j の総供給量 $\sum_{m_j} \bar{q}_{jm_j}^s$ が，同地域からの総輸出量 $\sum_i \bar{z}_{ji}$ より大きければ，均衡シャドウ供給価格はゼロとなる．しかしながら，もしその総供給量がその総輸出量に等しければ，均衡シャドウ供給価格は非負で正となりうる．

(3.6) によると，もし追加的な均衡需要量 $\bar{q}_{jn_j}^d$ が，その上限 $\hat{q}_{jn_j+1}^d-\hat{q}_{jn_j}^d$ より小さければ（ただし $n_j \neq N_j$），供給者から需要者へ支払われると見られる均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}_{jn_j}^d$ は常にゼロである．n_j^* より小さい u_j に関して，もしその追加的な需要量が，正確にその上限 $\hat{q}_{ju_j+1}^d-\hat{q}_{ju_j}^d$ に等しいならば，その均衡シャドウ補助金は，正となり，$\hat{p}_{ju_j+1}^d-\bar{p}_{jn_j^*}^d$ に等しくなければならない．勿論最終的な正の追加的な需要量 $\bar{q}_{jn_j^*}^d$ が，その上限 $\hat{q}_{jn_j^*+1}^d-\hat{q}_{jn_j^*}(n_j^* \neq N_j)$ に等しくなっても，その均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}_{jn_j^*}^d$ はゼロである．

最後に (3.7) を解釈しよう．もし追加的な供給量 $\bar{q}_{jm_j}^s$ が，その上限 $\hat{q}_{jm_j+1}^s-\hat{q}_{jm_j}^s$ より小さければ，需要者が供給者へ支払うと見られる均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}_{jm_j}^s$ は，ゼロでなければならない．m_j^* より小さい v_j に関して，もしその追加的な供給量 $\bar{q}_{jv_j}^s$ が，その上限 $\hat{q}_{jv_j+1}^s-\hat{q}_{jv_j}^s$ に等しければ，その均衡シャドウ補助

金 $\bar{\lambda}^s_{jv_j}$ は，$\bar{q}^s_{jm_j^*} - \hat{q}^s_{jv_j+1}$ に等しくなければならない．勿論，$\bar{q}^s_{jm_j^*}$ がその上限 $\hat{q}^s_{jm_j^*+1} - \hat{q}^s_{jm_j^*}$ $(m_j^* \neq M_j)$ に等しくても，その均衡シャドウ補助金 $\bar{\lambda}^s_{jm_j^*}$ はゼロである．

以上のように，クーン=タッカー最適条件式はうまく経済学的に説明される．

5. 例　題

これまで方法論と経済学的な意味付けに携わってきた．ここで仮設的な経済を例題に引き出し，ここで述べた方法で実際にどのように解かれるかを示そう．

仮設的な経済：ある市場1と，それを除いた残りの市場2とがコーンを生産し，貿易し，消費するとしよう．代替財や補完財はないとする．これら二つの市場の需要及び供給曲線は，次のように特徴ずけられる：

市場1：

$$\text{需要}\begin{cases} p_1^d = 140 - q_1^d,\ 50 \geqq q_1^d \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_1^d = 120 - 0.6q_1^d,\ q_1^d \geqq 50 & \text{に対して,} \end{cases}$$

$$\text{供給}\begin{cases} p_1^s = 20 + 0.5q_1^s,\ 80 \geqq q_1^s \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_1^s = -20 + q_1^s,\ q_1^s \geqq 80 & \text{に対して,} \end{cases}$$

市場2：

$$\text{需要}\begin{cases} p_2^d = 212 - 1.2q_2^d,\ 60 \geqq q_2^d \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_2^d = 200 - q_2^d,\ 80 \geqq q_2^d \geqq 60 & \text{に対して,} \\ p_2^d = 184 - 0.8q_2^d,\ q_2^d \geqq 80 & \text{に対して,} \end{cases}$$

$$\text{供給}\begin{cases} p_2^s = 20 + 0.55q_2^s,\ 40 \geqq q_2^s \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_2^s = 10 + 0.8q_2^s,\ q_2^s \geqq 40 & \text{に対して.} \end{cases}$$

単位当りの貿易費用：

$t^1_{11} = t^1_{22} = 0$，$t^1_{12} = t^1_{21} = 5$，$t^2_{ij} = 0$ すべての i，j $= 1, 2$ に対して，

この需要及び供給の屈折点の座標を求め，各屈折点の数量を基準にして，需要及び供給を測り変えると，次のような直線群を得る：

市場1：

$$\text{需要}\begin{cases} p_{10}^d = 140 - q_{10}^d,\ 50 \geqq q_{10}^d \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_{11}^d = 90 - 0.6q_{11}^d,\ q_{11}^d \geqq 0 & \text{に対して,} \end{cases}$$

$$\text{供給}\begin{cases} p_{10}^s = 20 + 0.5q_{10}^s,\ 80 \geqq q_{10}^s \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_{11}^s = 60 + q_{11}^s,\ q_{11}^s \geqq 0 & \text{に対して,} \end{cases}$$

市場2：

$$\text{需要}\begin{cases} p_{20}^d = 212 - 1.2q_{20}^d,\ 60 \geqq q_{20}^d \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_{21}^d = 140 - q_{21}^d,\ 20 \geqq q_{21}^d \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_{22}^d = 120 - 0.8q_{22}^d,\ q_{22}^d \geqq 0 & \text{に対して,} \end{cases}$$

$$\text{供給}\begin{cases} p_{20}^s = 20 + 0.55q_{20}^s,\ 40 \geqq q_{20}^s \geqq 0 & \text{に対して,} \\ p_{21}^s = 42 + 0.8q_{21}^s,\ q_{21}^s \geqq 0 & \text{に対して,} \end{cases}$$

これを P. Wolfe のシンプレックス法[2)]で解くと，次のような解を得る．

$\bar{\rho}_1^d = 79.4$，$\bar{\rho}_2^d = 84.4$，$\bar{\rho}_1^s = 79.4$，$\bar{\rho}_2^s = 84.4$，$\bar{\lambda}_{10}^d = 10.6$，$\bar{\lambda}_{20}^d = 55.6$，$\bar{\lambda}_{21}^d = 35.6$，$\bar{\lambda}_{10}^s = 19.4$，$\bar{\lambda}_{20}^s = 42.4$，$\bar{z}_{11} = 67.7$，$\bar{z}_{12} = 31.7$，$\bar{z}_{21} = 0$，$\bar{z}_{22} = 92.9$，$\bar{q}_{10}^d = 50.0$，$\bar{q}_{11}^d = 17.7$，$\bar{q}_{10}^s = 80.0$，$\bar{q}_{11}^s = 19.4$，$\bar{q}_{20}^d = 60.0$，$\bar{q}_{21}^d = 20.0$，$\bar{q}_{22}^d = 44.6$，$\bar{q}_{20}^s = 40.0$，$\bar{q}_{21}^s = 52.9$

$n_1^* = 1$，$m_1^* = 1$，$n_2^* = 2$，$m_2^* = 1$ だから，$\bar{p}_1^d = \bar{p}_{11}^d = \bar{\rho}_1^d = 79.4$，$\bar{p}_1^s = \bar{p}_{11}^s = \bar{\rho}_1^s = 79.4$，$\bar{p}_2^d = \bar{p}_{22}^d = \bar{\rho}_2^d = 84.4$，$\bar{p}_2^s = \bar{p}_{21}^s = \bar{\rho}_2^s = 84.4$ となり，均衡市場需要及び供給価格が決定される．市場1と2との総需要と総供給は，$\bar{q}_1^d = 67.7$，$\bar{q}_1^s = 99.4$，$\bar{q}_2^d = 124.6$，$\bar{q}_2^s = 92.9$ となる．これらの解は，最適であり，首尾一貫している．

6. 結　び

ある財が影響力の強い補完財や代替財をもたない，むしろ独立財に近いものであれば，需要や供給が屈折点をもっている場合とか，適当な曲線で表わされる場合，ここで述べられた方法により，各市場地域の需要や供給価格，需要や供給量，市場間の貿易量などが簡単に求められる．この方法を適用する場合，需要や供給が，ここで述べた仮定を満たしているならば，より多くの屈折点を選ぶことにより（即ち$N_j \to \infty$，$M_j \to \infty$），より正確な均衡解が求められる．例えば自由経済の下で，国民の主食が米で，小麦や馬鈴薯やコーンの製品との代替関係が薄い場合では，この方法がうまく使用できるであろう．この方法は，多数の財を含む場合に拡張される必要があり，将来されるであろう．

注1）Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (1950)：Non-Linear Programming. J. Neyman (ed.)：Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of Calf. Press, Berkeley, pp. 481—492.

注2）Wolfe, P. (1959)：The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica, Vol. 27, pp. 382—398.

数注　次の解 ($\bar{q}^d_{jn_j}$, $\bar{q}^s_{jm_j}$, $\bar{z}_{ij}$) は，すべての制限条件式 (2.1) から (2.4) を不等号＞で満たす故にスレイターの条件は満たされている：

すべての j について

$\bar{q}^d_{jn_j}=0\ (0\leqq n_j\leqq N_j)$,

$\hat{q}^s_{j1}-\hat{q}^s_{j0}>\bar{q}^s_{j0}>\bar{z}_{jj}>0,\ \bar{z}_{ij}=0\ (i\neq j)$,

$\bar{q}^s_{jm_j}=0\ (1\leqq m_j\leqq M_j)$.

References

(1) Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, Non-Linear Programming. J. Neyman ed., Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, 1950, pp. 481—492.

(2) Onishi, H., Intertemporal Equilibrium Models, Unpublished Paper, Feb. 1971.

(3) Samuelson, P. A., Spatial Price Equilibrium and Linear Programming, Am. Econ. Review, June 1952, pp. 283—303.

(4) ＿＿＿＿, Intertemporal Price Equilibrium：A Prologue to the Theory of Speculation, Weltwirtschaftliches Archiv, Rec. 1957, pp. 181—219.

(5) Takayama, T. and G. G. Judge, Spatial and Temporal Price Allocation Models, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, Holland, 1971.

(6) Wolfe, P. The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica, Vol. 27, 1959, pp. 382—398.