# 経済成長モデルにおけるヴィンテッジ分析


| | |
|---|---|
| 誌名 | 農林業問題研究 |
| ISSN | 03888525 |
| 著者 | 足立, 恭一郎 |
| 巻/号 | 10巻1号 |
| 掲載ページ | p. 33-42 |
| 発行年月 | 1974年6月 |

# 経済成長モデルにおけるヴィンテッジ分析

## —農業への応用—

足立 恭一郎

### はじめに*

経済成長モデルにおけるヴィンテッジ分析は，これまで種々行われてきた．その代表的なものとしては，Johansen, L.〔3〕, Solow, R. M.〔7〕, Phelps, E. S.〔8〕, Kemp, M. C.=Thānh, P. C.〔4〕, Allen, R. G. D.〔1〕, 木下公士〔5〕等がある．本稿では，土地という生産要素が重要な役割をもつ農業に，彼等が開発した概念を適用し，土地が農業の持続的成長にとって如何に厳しい制約条件となっているかについて，理論的に分析する。具体的な分析に先立ち，諸前提を次に列挙しておく．

(1) コブ=ダグラス型生産関数を用いる．
(2) 生産要素は，土地($A$)，資本($K$)，労働($L$)の三つである．
(3) 経済主体は，地主，資本家，労働者の三主体を考える．
(4) 生産物市場及び生産要素市場の完全競争，及び生産要素の完全雇用を仮定する．
(5) 新しい技術は新規資本設備にのみ体化される embodied な技術進歩を取扱う．それ故に，資本は異質的な構成をもっていることになる．そこでヴィンテッジ・アプローチを試みる．
(6) パテ・粘土ケースを取扱う．パテ・粘土ケースとは Phelps, E. S.〔8〕が用いた用語で，生産要素間の代替は事前的に可能であっても事後的には不可能な場合をさしている．つまり，「新しい機械については労働との代替が認められるが，ひとたび据え付けられると機械と労働との間には代替は認められず，固定された労働投入量で機械を動かすことになる[1]」のである．
(7) zero-foresight を仮定する．
(8) 比例的貯蓄関数を仮定する．
(9) 資本の減耗に関して，物理的減耗(depreciation)及び経済的陳腐化(obsolesence)を考慮する．
(10) 労働の供給量及び土地の供給量は各々 $n$, $k$ の比率で増加しているものとする．

尚，コブ=ダグラス型生産関数は，ハロッド中立的，ソロー中立的，及びヒックス中立的な三様の中立的技術進歩を許容する唯一の生産関数であり[2]，これから導かれる結果が，この特別な生産関数に大きく依存していることに留意する必要がある．

## 1. 1部門分析

### 1.1 モデルの定式化

(a) 完全操業（full-capacity）の条件

$$Q_v(v)=e^{\lambda\beta v}K_v(v)^{\alpha}L_v(v)^{\beta}A_v(v)^{\gamma}$$
$$=K_v(v)^{\alpha}\{e^{\lambda v}L_v(v)\}^{\beta}A_v(v)^{\gamma}$$
$$\alpha+\beta+\gamma=1 \tag{1.1}$$

ただし，$Q_v(v)$ はヴィンテッジ $v$ から $(v+dv)$ までの資本設備を使用して得られる $v$ 時点の農産物量で，$K_v(v)$, $L_v(v)$, $A_v(v)$ は各々 $v$ 時点の粗投資，その粗投資の資本設備に結合される労働量及び土地面積を表す．$e^{\lambda\beta v}$ はハロッド中立的技術進歩を表している．

$$Q_v(t)=e^{\lambda\beta v}K_v(t)^{\alpha}L_v(t)^{\beta}A_v(t)^{\gamma},$$
$$\alpha+\beta+\gamma=1 \tag{1.2}$$

$Q_v(t)$はヴィンテッジ$v$から$(v+dv)$までの資本設備を使用して得られる $t$ 時点の農産物量であり，$K_v(t)$ は $t$ 時点に於て物理的に減耗せずに残っている資本量を表し，$L_v(t)$, $A_v(t)$ は各々 $K_v(t)$ に結合されている労働量及び土地面積を表す．

ところで，われわれはパテ・粘土ケースを仮定しており，資本と労働及び土地は事後的には代替不可能であるから，

$$\frac{L_v(t)}{K_v(t)}=\frac{L_v(v)}{K_v(v)},\quad \frac{A_v(t)}{K_v(t)}=\frac{A_v(v)}{K_v(v)}$$

が成立しなければならない．いま，資本設備が $\delta$（$>0$，一定）の比率で物理的に減耗していくものとすれば，ヴィンテッジ $v$ から $(v+dv)$ の資本設備の $t$ 時点の使用量 $K_v(t)$ と，この資本設備の最初の投下量すなわち粗投資 $K_v(v)$ との関係は，

$$K_v(t)=e^{-\delta(t-v)}K_v(v),\ v<t \tag{1.3}$$

となる．パテ・粘土ケースを仮定しているから，労働及び土地についても同様な関係が成立する．

$$L_v(t)=e^{-\delta(t-v)}L_v(v),\ v<t \tag{1.3'}$$

$$A_v(t)=e^{-\delta(t-v)}A_v(v),\ v<t \tag{1.3''}$$

資本の物理的減耗によりそこから解放された労働や土地は，後述する如く，新規粗投資すなわち $t$ 時点における資本投下 $K_t(t)$ に振り向けられる．(1.1)〜(1.3″) より (1.4) を得る．

$$\begin{aligned}Q_v(t)&=e^{\lambda\beta v-\delta(t-v)}K_v(v)^{\alpha}L_v(v)^{\beta'}A_v(v)^{\gamma}\\&\equiv e^{-\delta(t-v)}Q_v(v)\end{aligned} \tag{1.4}$$

次に，各ヴィンテッジの異質な資本はある値 $\theta(t)$ の経済寿命（economic life）をもつものと仮定すれば，$t$ 時点の総産出量は，

$$Q(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t}Q_v(t)dv=e^{-\delta t}\int_{t-\theta(t)}^{t}e^{\delta v}Q_v(v)dv \tag{1.5}$$

で表される．尚，ここでは農産物価格を1としているので，総産出量と総所得は等しくなる．(1.5) 式の意味するところは，総産出量 $Q(t)$ は賃金及び地代コストをカバーしうるものの中で，スクラップ寸前の最古の資本設備から最新の資本設備までを使用して得られた生産物の総和に等しいということである．尚，ここでは経済寿命を時間 $t$ の関数としているが，以下の分析では，さしつかえのない限り議論の繁雑化を避けるために，$\theta$ を一定として扱うことにする．

(b)　完全雇用（full-employment）の条件

$$L(t)=L_0e^{nt}=\int_{t-\theta}^{t}L_v(t)dv=e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}L_v(v)dv \tag{1.6}$$

ただし，$L(t)$ は $t$ 時点の総労働力，$L_0e^{nt}$ は $t$ 時点の労働供給であり，$\int_{t-\theta}^{t}L_v(t)dv$ はヴィンテッジ $(t-\theta)$ から $t$ までの資本設備に結合されている労働力で労働の需要量を表している．

また，土地についても労働力の場合と全く同様のことがいえ，次式が成立する．

$$A(t)=A_0e^{\nu t}=\int_{t-\theta}^{t}A_v(t)dv=e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}A_v(v)dv \tag{1.7}$$

(c)　投資・貯蓄の均衡条件

$$K_t(t)=sQ(t),\ 0<s<1 \tag{1.8}$$

ただし，$K_t(t)$ は $t$ 時点における新規粗投資で，$s$ は貯蓄性向を表わす．

これで分析に必要なモデルがすべて定式化された．次の仕事は，モデルの一つの解がすべての変数が同じ成長率で成長するようなもの（持続的成長解）であるか否かを検討することである．

**1.2　1部門持続的成長の存在**[3)]

いま，$t$ 時点の総産出量 $Q(t)$ が $g$ の比率で成長しているものとする．（ただし，$g$ は後に具体的に求められ，一定であることが示される．）

$$Q(t)=Q_0e^{gt}\ ;\ Q_0,\ g\ \text{は一定} \tag{1.9}$$

(1.5) を $t$ について微分し，それに (1.9) を代入して整理すれば，次のような $\theta$ 階非同次線型定差方程式が得られる．[数注1)]

$$Q_t(t)-e^{-\delta\theta}Q_{t-\theta}(t-\theta)=(g+\delta)Q_0e^{gt}$$

この方程式の1つの特解（実数解）を求めると，

$$Q_t(t)=\frac{g+\delta}{1-e^{-\theta(g+\delta)}}Q_0e^{gt}\equiv QQ_0e^{gt} \tag{1.10}$$

$$Q\equiv\frac{g+\delta}{1-e^{-\theta(g+\delta)}}$$

を得る．[数注2)] また，(1.8) に (1.9) を代入して，

$$K_t(t)=sQ_0e^{gt} \tag{1.11}$$

を得る．

次に，$L_t(t)$ を $t$ 時点に新しく投資された資本設備 $K_t(t)$ に結合される労働力の量を表すものとすると，$L_t(t)$ は，労働力の自然増加量 $nL(t)$，資本設備の物理的減耗によりそこから自由になる労働力の量 $\delta L(t)$，及び一定値 $\theta$ の経済寿命をもつ最古の資本設備がスクラップされることにより自由になる労働力の量とから構成される．この三つの構成要素の内で，第三のものは前二者の加重和で表現され得る．[4)] つまり，

$$\begin{aligned}L_t(t)=&(n+\delta)L(t)+(n+\delta)L(t-\theta)e^{-\delta\theta}\\&+(n+\delta)L(t-2\theta)e^{-2\delta\theta}\\&+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{1.12}$$

と書ける．ところで，労働力は $n$ の比率で増加していると仮定しているから，(1.12) は次のように書くことができる．[5)]

$$L_t(t)=(n+\delta)\,L_0e^{nt}\{1+e^{-(n+\delta)\theta}+e^{-2(n+\delta)\theta}+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{n+\delta}{1-e^{-\theta(n+\delta)}}L_0e^{nt}\equiv LL_0e^{nt}$$

$$L\equiv\frac{n+\delta}{1-e^{-\theta(n+\delta)}} \tag{1.13}$$

尚，ここではハロッド中立的技術進歩を仮定しているから，効率単位で測った労働力の量は，

$$\bar{L}_t(t)=e^{\lambda t}L_t(t)=LL_0e^{(\lambda+n)t} \tag{1.14}$$

である．

土地についても労働力と同様のことが成立し，

$$A_t(t)=\frac{k+\delta}{1-e^{-\theta(k+\delta)}}A_0e^{kt}\equiv AA_0e^{kt}$$

$$A\equiv\frac{k+\delta}{1-e^{-\theta(k+\delta)}} \tag{1.15}$$

と書ける．ただし，$A_t(t)$ は $K_t(t)$ に結合される土地面積を表す．

以上，求められた結果を整理すれば次のようになる．

$$Q(t)=Q_0e^{gt},\quad Q_t(t)=QQ_0e^{gt},\quad K_t(t)=sQ_0e^{gt}$$

$$\bar{L}_t(t)=LL_0e^{(\lambda+n)t},\quad A_t(t)=AA_0e^{kt}$$

このモデルに持続的成長解が存在するためには，

$$g=\lambda+n=k \tag{1.16}$$

が成立することが必要十分条件となる．なぜなら，その場合に限り $Q_0$ が一定値をとり得るからである．ちなみに $Q_0$ は次式

$$Q_0=\left[\frac{(1-e^{-\theta(g+\delta)})(n+\delta)^{\beta}(k+\delta)^{\gamma}s^{\alpha}}{(g+\delta)(1-e^{-\theta(n+\delta)})^{\beta}(1-e^{-\theta(k+\delta)})^{\gamma}}\cdot L_0^{\beta}A_0^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\beta+\gamma}}$$

で与えられ，[数注3)] その持続的成長径路は，

$$Q(t)=\left[\frac{1}{Q}s^{\alpha}(LL_0)^{\beta}(AA_0)^{\gamma}\right]e^{gt},\quad g=\lambda+n=k \tag{1.17}$$

で与えられる．尚，（1.16）式は土地面積の拡大（或は土地生産性の増大）が技術進歩率と労働力の成長率との和に等しくならなければ，この経済に持続的成長解が存在しえないことをエクスプリシットに表現しており，現実的な問題としてそれは非常に厳しい条件であるといわねばならない．

(a)　資本設備の経済寿命の決定

これまで，われわれは議論の繁雑化を避けるために，資本設備の経済寿命 $\theta$ を一定として取扱ってきた．ここで，$\theta$ が如何にして決定されるかを示すことにしよう．[6)]

いま，ヴィンテッジ $v$ の資本設備が $t$ 時点の生産 $Q_v(t)$ によりあげうる利益（マーシャルの意味での quasi rent）を $\Pi_v(t)$ とすれば，$\Pi_v(t)$は，

$$\Pi_v(t)=Q_v(t)-\omega(t)L_v(t)-a(t)A_v(t) \tag{1.18}$$

と定義できる．ただし，$\omega(t)$, $a(t)$ は各々 $t$ 時点の賃金率及び地代である．ところで，$t$ 時点の生産における最古の資本設備のヴィンテッジを$(t-\theta)$とすれば，たとえ物理的寿命がまだ十分あるとしても経済的には上昇する賃金率及び地代をカバーすることができず，$(t+dt)$ 時点（$dt>0$）にはスクラップ化される運命にある限界的な資本設備であるといえる．したがって，

$$\Pi_{t-\theta}=Q_{t-\theta}(t)-\omega(t)L_{t-\theta}(t)-a(t)A_{t-\theta}(t)=0 \tag{1.19}$$

が成立する．尚，われわれは将来の賃金率や地代について特別の期待をもたない zero-foresight の立場をとっているから，（1.19）を満足する $\omega(t)$, $a(t)$ は各々 $t$ 時点の新規粗投資の資本設備に結合される労働及び土地の限界生産力に等しくなる．つまり，

$$\omega(t)=\frac{\partial Q_t(t)}{\partial\bar{L}_t(t)} \tag{1.20}$$

$$a(t)=\frac{\partial Q_t(t)}{\partial A_t(t)} \tag{1.21}$$

が成立する．（1.20）は右辺を展開して，

$$\omega(t)=\beta\frac{(g+\delta)(1-e^{-\theta(n+\delta)})}{(n+\delta)(1-e^{-\theta(g+\delta)})}\cdot\frac{Q_0}{L_0}e^{\lambda t}$$

$$=\beta\frac{QQ_0}{LL_0}e^{\lambda t} \tag{1.20′}$$

と書ける．[数注4)] すなわち，労働を名目的な労働力で測定する場合，賃金率は技術進歩率 $\lambda$ で上昇していく．（ただし，労働を効率単位で測定した場合は一定である．）

（1.21）も同様にして，

$$a(t)=\gamma\frac{Q_0}{A_0}:\text{一定} \tag{1.21′}$$

と書ける．

（1.19）に（1.20′），（1.21′）を代入して整理すれば，

$$(1-\gamma)e^{-g\theta}=\beta e^{-n\theta}\ ;\ g=\lambda+n=k \tag{1.22}$$

が得られ，[数注5)] この両辺の自然対数をとれば，

$$\theta=\frac{1}{\lambda}l_n\frac{1-\gamma}{\beta}\ ;\ \lambda=g-n \tag{1.23}$$

が得られる．これより，われわれの仮定の下では，資

本設備の経済寿命 $\theta$ は技術進歩率 $\lambda$ と労働の所得分配率 $\beta$，及び土地の所得分配率 $\gamma$ とに依存しており，物理的減耗率 $\delta$ や貯蓄性向 $s$ からは独立であることがわかる．

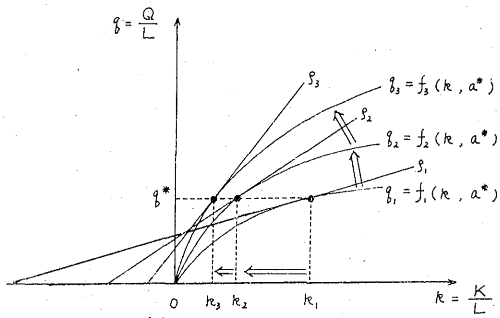
(b)　技術進歩率 $\lambda$ の経済寿命 $\theta$ に及ぼす影響

（1.23）を $\lambda$ について偏微分すれば，

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\lambda^2}l_n\frac{1-\gamma}{\beta}<0 \tag{1.24}$$

が得られ，[数注6)] これより技術進歩率 $\lambda$ の上昇は資本設備の経済寿命 $\theta$ の短縮化，つまりスクラップ化を促進する作用があることがわかる．これを理論的に説明すれば次の如くである．

図　1




但し $\left(\frac{A}{L}\right)=a^*$：一定として作図

技術進歩が起こった時，（具体的には，時間が $t_1\to t_2\to t_3$ と経過するにつれて，生産関数が $f_1\to f_2\to f_3$ へとシフトすることにより表現できる）ある一定の一人当たり産出量 $q^*$ を得るために必要な一人当たり資本設備は，$k_1\to k_2\to k_3$ と減少していく．この時，将に背後では資本設備のスクラップ化が進行していのである．すなわち，$t_1$ 時点に於て利潤率 $\rho_1$ を与えるような資本設備は，生産関数が $f_1\to f_2$ にシフトする技術進歩があると $t_2$ 時点には効率の悪い資本設備となり，また $t_2$ 時点に利潤率 $\rho_2$ を与えるような資本設備は，$t_3$ 時点には効率の劣る資本設備と化すのである．それ故，技術進歩が起こり，生産関数のシフトが時間的に早まり，或はシフト幅が大きくなればなるほど，資本設備の陳腐化の速度もそれだけ加速され経済寿命が短縮されるのである．

(c)　労働の所得分配率 $\beta$ の経済寿命 $\theta$ に及ぼす影響

（1.23）を $\beta$ について偏微分すれば，

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\beta}<0 \tag{1.25}$$

を得る．これより，労働の所得分配率 $\beta$ が増加すれば資本設備の経済寿命 $\theta$ が短縮されることがわかる．これを理論的に説明すれば，以下の如くである．いま議論の繁雑化を回避するために，コブ=ダグラス型生産関数を，

$$Q=K^{\alpha}L^{\beta},\quad \alpha+\beta=1$$

としよう．両辺の対数をとって，

$$l_nQ=\alpha l_nK+\beta l_nL$$

とし，$K$，$L$ の限界生産力を各々求めれば，

$$\frac{\partial l_nQ}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{\alpha}{K}\quad\therefore\frac{\partial Q}{\partial K}=\alpha\frac{Q}{K}$$

$$\frac{\partial l_nQ}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{\beta}{L}\quad\therefore\frac{\partial Q}{\partial L}=\beta\frac{Q}{L}$$

となる．オイラーの定理より，

$$Q=F_k\cdot K+F_l\cdot L$$

$$=\alpha\frac{Q}{K}\cdot K+\beta\frac{Q}{L}\cdot L=\rho K+\omega L$$

であるから，これより，

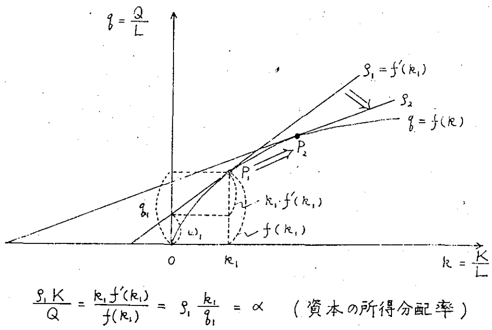
$$\alpha=\frac{\rho\cdot K}{Q},\quad \beta=\frac{\omega\cdot L}{Q}$$

を得る．ただし，$\rho$,$\omega$ は各々利潤率，賃金率である．それ故，

$$\alpha+\beta=1 \rightleftarrows \frac{\rho\cdot K}{Q}+\frac{\omega\cdot L}{Q}=1$$

という関係が得られる．これを図示すれば次のようになる．

図　2




$$\frac{g_1K}{Q}=\frac{k_1f'(k_1)}{f(k_1)}=g_1\frac{k_1}{q_1}=\alpha\quad（資本の所得分配率）$$

$$\frac{\omega_1L}{Q}=\frac{f(k_1)-k_1f'(k_1)}{f(k_1)}=\frac{\omega_1}{q_1}=\beta\quad（労働の所得分配率）$$

$\beta$ が増加するということは，図2に於て，$P_1$ が $P_2$ に移動していくことと同義である．その時，資本の所得分配率 $\alpha$ 及びマーシャルの意味での quasi rent は $\beta$ とは逆に減少していき，生産関数の延長上に於ては漸近的にゼロに近づく．この時，労働の所得分配率 $\beta$ は

1に近づき，$\alpha \doteqdot 0$，quasi rent $\doteqdot 0$ で資本設備はスクラップされる．

(d) 土地の所得分配率 $\gamma$ の経済寿命 $\theta$ に及ぼす影響

(1.23) を $\gamma$ について偏微分すれば，

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\gamma}<0 \tag{1.26}$$

を得る．土地の所得分配率 $\gamma$ の経済寿命 $\theta$ への影響も，労働の所得分配率 $\beta$ と同様であることがわかる．

### 1.3 資本設備の総量及びその平均年齢[7]

これまでの結果を整理すれば，$Q(t)=Q_0e^{gt}$，$\bar{L}(t)=L_0e^{gt}$，$A(t)=A_0e^{gt}$ となる．次に $K(t)$ を求めよう．

持続的成長経路上の任意の時点 $t$ に於て，資本ストックに含まれるヴィンテッジ $v$ の資本設備の量は，(1.8) より，

$$K_v(t)=sQ(t)=sQ_0e^{gv},\quad v<t \tag{1.27}$$

であり，資本設備の量は，

$$K(t)=\int_{t-\theta}^{t}K_v(t)\,dv=\frac{sQ_0}{(g+\delta)}e^{gt}\cdot(1-e^{-\theta(g+\delta)}) \tag{1.28}$$

で表される．[数注7] ところでヴィンテッジ $v$ の資本設備は $t$ 時点で $(t-v)$ 期間だけ古くなっているから，資本ストックに含まれる資本設備の年齢の集計値は次式で表される．[数注8]

$$\int_{t-\theta}^{t}(t-v)K_v(t)\,dv=\frac{sQ_0}{(g+\delta)}e^{gt}\left\{\frac{1}{g+\delta}\cdot(1-e^{-\theta(g+\delta)})-\theta e^{-\theta(g+\delta)}\right\} \tag{1.29}$$

すなわち，資本設備の量も年齢の集計値も共に持続的成長率 $g$ で増大し，財蓄性向 $s$ に比例していることがわかる．また (1.29) を (1.28) で除すると，ストックに含まれる資本設備の平均年齢が求められる．

$$\text{平均年齢}=\frac{1}{g+\delta}-\frac{\theta e^{-\theta(g+\delta)}}{(1-e^{-\theta(g+\delta)})}$$

$$=\frac{1}{g+\delta}-\frac{\theta}{(e^{\theta(g+\delta)}-1)} \tag{1.30}$$

したがって「平均年齢は時間に関係なく一定で，成長率 $g$ が高い時には平均年齢は短くなるが，貯蓄性向 $s$ とは無関係である」[8] ことがわかる．

## 2. 2 部 門 分 析

### 2.1 モデルの定式化

ここでは，前節で示した1部門分析を2部門分析に拡張し，1部門分析では見られなかった特別な関係が導けるかどうかを検討する．尚，諸前提及び各変数の意味は1部門分析に準ずるものとする．

(a) 完全操業の条件

第1産業部門を生産財生産部門とし，その生産物をニューメレール (numéraire) にとる．すなわち，生産財価格は1でこれを基準にして農産物価格を測定する．第1産業部門の生産関数は，

$$Q_{1v}(t)=e^{\lambda_1\beta_1 v}K_{1v}(t)^{\alpha_1}L_{1v}(t)^{\beta_1},\quad \alpha_1+\beta_1=1 \tag{2.1}$$

で与えられるものとする．次に，第2産業部門は農業部門とする．そして，その生産関数は前節と同様に，

$$Q_{2v}(t)=e^{\lambda_2\beta_2 v}K_{2v}(t)^{\alpha_2}L_{2v}(t)^{\beta_2}A_v(t)^{\gamma},\quad \alpha_2+\beta_2+\gamma=1 \tag{2.2}$$

で与えられるものと仮定する．

$K_{iv}(v)$ と $K_{iv}(t)$ との関係は次式により表される．尚 $\delta_i$ は第 $i$ 部門 $(i=1,2)$ の資本設備の物理的減耗率である．

$$K_{iv}(t)=e^{-\delta_i(t-v)}K_{iv}(v),\quad i=1,\ 2 \tag{2.3}$$

また，パテ・粘土ケースを仮定しているから，労働及び土地についても同様な関係が成立する．

$$L_{iv}(t)=e^{-\delta_i(t-v)}L_{iv}(v),\quad i=1,\ 2 \tag{2.3$'$}$$

$$A_v(t)=e^{-\delta_2(t-v)}A_v(v) \tag{2.3$''$}$$

これより，(2.1)，(2.2) は等しく次のように書ける．

$$Q_{iv}(t)=e^{-\delta_i(t-v)}Q_{iv}(v),\quad i=1,\ 2 \tag{2.4}$$

いま，$Q_i(t)$ を $t$ 時点に於ける第 $i$ 部門の総産出量とすると，それは

$$Q_i(t)=\int_{t-\theta_i(t)}^{t}Q_{iv}(t)\,dv=e^{-\delta_i t}\int_{t-\theta_i(t)}^{t}e^{\delta_i v}Q_{iv}(v)\,dv,\quad i=1,\ 2 \tag{2.5}$$

で表される．ただし，$\theta_i(t)$ は $t$ 時点における第 $i$ 部門の資本設備の経済寿命である．次に $Y(t)$ を $t$ 時点の総所得とし，第1部門の生産物で測った第2部門の生産物の $t$ 時点における価格を $P(t)$ とすれば，$Y(t)$ は

$$Y(t)=Q_1(t)+P(t)Q_2(t) \tag{2.6}$$

と書ける．

(b) 完全雇用の条件

$$L(t)=L_0e^{nt}=L_1(t)+L_2(t) \tag{2.7}$$

ただし，$L(t)$ は $t$ 時点の総労働力，$L_0e^{nt}$ は労働供給，$L_i(t)$ は第 $i$ 部門の $t$ 時点の労働の需要量を表している．従って，$L_i(t)$ は前節にならって，

$$L_i(t)=\int_{t-\theta_i(t)}^{t}L_{iv}(t)\,dv=e^{-\delta_i t}\int_{t-\theta_i(t)}^{t}e^{\delta_i v}L_{iv}(v)\,dv,\quad i=1,\ 2 \tag{2.8}$$

で表される．また，土地についても全く同様に，

$$A(t)=A_0e^{kt}=\int_{t-\theta_2(t)}^{t}A_v(t)dv$$

$$=e^{-\delta_2 t}\int_{t-\theta_2(t)}^{t}e^{\delta_2 v}A_v(v)dv \qquad (2.9)$$

が成立する．

(c)　投資・財蓄の均衡条件

$$K_t(t)=sY(t) \qquad (2.10)$$

$K_t(t)$ は $t$ 時点に於ける新規粗投資で，これは後述の如く，第1部門の生産物の総量に等しい．

ところで，いま $c$ を第2部門で生産される生産物すなわち農産物に対する限界消費性向とし，農産物は過不足なく消費され，生産財はすべて投資されるものと仮定すれば，次の等式が成立する．

$$Q_1(t)=sY(t)=K_t(t)=K_{1t}(t)+K_{2t}(t) \qquad (2.10')$$

$$P(t)Q_2(t)=cY(t),\ c+s=1 \qquad (2.11)$$

ただし，$K_{it}(t)$ は第 $i$ 部門における $t$ 時点の新規粗投資である．

次に，われわれは資本及び労働市場について完全競争を仮定しているから，利潤率及び賃金率は2部門を通じて等しくなり，また，利潤率，賃金率及び地代は各々の価値限界生産力に等しくなる．それ故，

$$\omega(t)=\frac{\partial Q_{1t}(t)}{\partial L_{1t}(t)}=P(t)\frac{\partial Q_{2t}(t)}{\partial L_{2t}(t)} \qquad (2.12)$$

$$\rho(t)=\frac{\partial Q_{1t}(t)}{\partial K_{1t}(t)}=P(t)\frac{\partial Q_{2t}(t)}{\partial K_{2t}(t)} \qquad (2.13)$$

$$a(t)=P(t)\frac{\partial Q_{2t}(t)}{\partial A_t(t)} \qquad (2.14)$$

が成立する．

### 2.2　2部門持続的成長解の存在

いま，$Q_i(t)$ が $g_i$ の比率で成長していくものとすれば，

$$Q_i(t)=Q_{0i}e^{g_it}\ ;\ Q_{0i},\ g_i \text{ は一定},\ i=1,\ 2 \qquad (2.15)$$

が成立し，(2.10′) より $Q_1(t)=sY(t)$ であるから，$t$ 時点の総所得 $Y(t)$ も第1部門の生産の成長率と同率で成長することがわかる．それ故，$Y(t)$ は次のように書ける．

$$Y(t)=\frac{1}{s}Q_1(t)=\frac{Q_{01}}{s}\cdot e^{g_1t} \qquad (2.16)$$

次に，第2部門の生産物すなわち農産物の価格を求めよう．(2.11)，(2.16) より，$P(t)$ は

$$P(t)=\frac{cY(t)}{Q_2(t)}=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{Q_{01}}{Q_{02}}\cdot e^{(g_1-g_2)t} \qquad (2.17)$$

となり，$g_1>g_2$ の場合，すなわち非農業部門の成長率が農業部門の成長率よりも高い場合，農産物価格は時間の経過と共に上昇していき——これは現実にありそうな事態である——$g_1<g_2$ の場合は逆に低下していく．

さて，ここでも前節と同様に経済寿命 $\theta_i(t)$ を一定と仮定して以下の分析を進めることにする．(2.5) を $t$ について微分し，それに (2.16) を代入して整理すれば，次のような $\theta$ 階非同次線型定差方程式が得られる．[9]

$$Q_{it}(t)-e^{-\delta_i\theta_i}Q_{it-\theta_i}(t-\theta_i)=(g_i+\delta_i)Q_{0i}e^{g_it}$$

$$i=1,\ 2$$

この方程式の1つの特解を求めると，

$$Q_{it}(t)=\frac{g_i+\delta_i}{1-e^{-\theta_i(g_i+\delta_i)}}Q_{0i}e^{g_it}\equiv Q_iQ_{0i}e^{g_it} \qquad (2.18)$$

$$Q_i\equiv\frac{g_i+\delta_i}{1-e^{-\theta_i(g_i+\delta_i)}},\ i=1,\ 2$$

を得る．[10] また，$L_{1t}(t)$ と $L_{2t}(t)$ の関係は (2.12) から得られる．(2.12) 式の第2項と第3項を各々計算すれば，

$$\omega(t)=\beta_1\frac{Q_{1t}(t)}{L_{1t}(t)}=P(t)\ \beta_2\frac{Q_{2t}(t)}{L_{2t}(t)} \qquad (2.19)$$

を得る．これより，$L_{1t}(t)$ と $L_{2t}(t)$ の関係は，

$$L_{2t}(t)=\left(\frac{\beta_2P(t)Q_{2t}(t)}{\beta_1Q_{1t}(t)}\right)L_{1t}(t)$$

$$=\left\{\frac{\beta_2c(g_2+\delta_2)\ (1-e^{-\theta_1(g_1+\delta_1)})}{\beta_1s(g_1+\delta_1)\ (1-e^{-\theta_2(g_2+\delta_2)})}\right\}L_{1t}(t)$$

$$=N\cdot L_{1t}(t) \qquad (2.20)$$

$$N\equiv\frac{\beta_2P(t)Q_{2t}(t)}{\beta_1Q_{1t}(t)}$$

$$=\frac{\beta_2c(g_2+\delta_2)\ (1-e^{-\theta_1(g_1+\delta_1)})}{\beta_1s(g_1+\delta_1)\ (1-e^{-\theta_2(g_2+\delta_2)})}$$

となる．

次に，$K_{1t}(t)$ と $K_{2t}(t)$ を求めよう．ここでは1部門分析と同様に，将来の賃金率の変動や利潤率の変動等について特別な期待を導入しない zero-foresight の立場に立ち，かつ，資本市場に於ける完全競争を仮定しているから，1単位の新規粗投資は第1部門，第2部門共に等しい利潤率を示す．故に，

$$\frac{\Pi_{2t}(t)}{K_{2t}(t)}=\frac{\Pi_{1t}(t)}{K_{1t}(t)} \qquad (2.21)$$

という関係が導かれる．[数注9] ただし，$\Pi_{it}(t)$ は第 $i$ 部門に於て新規粗投資から得られる総利潤である．すなわち $\Pi_{it}(t)$ は

$$\Pi_{2t}(t)=P(t)Q_{2t}(t)-\omega(t)L_{2t}(t)-a(t)A_t(t)$$

$$\Pi_{1t}(t)=\quad Q_{1t}(t)-\omega(t)L_{1t}(t) \tag{2.22}$$

で与えられる．(2.21) より $K_{2t}(t)$ と $K_{1t}(t)$ の関係は，

$$K_{2t}(t)=\frac{\Pi_{2t}(t)}{\Pi_{1t}(t)}\cdot K_{1t}(t)$$

となるから，これに (2.22) を代入して整理すれば次式が得られる.数注10)

$$K_{2t}(t)=\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)NK_{1t}(t) \tag{2.23}$$

これに (2.10′) 及び (2.15) を代入して整理すれば，$K_{1t}(t)$ 及び $K_{2t}(t)$ が求められる．

$$K_{1t}(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}Q_{01}e^{g_1t}$$

$$K_{2t}(t)=\frac{\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}Q_{01}e^{g_1t} \tag{2.24}$$

すなわち，$Q_{1t}(t)$，$K_{1t}(t)$ 及び $K_{2t}(t)$ は成長率 $g_1$ で成長し，$Q_{2t}(t)$ は $g_2$ で成長することがわかる．

次に $L_{1t}(t)$ と $I_{2t}(t)$ の成長率について考察しよう．$L_{it}(t)$ は $t$ 時点に新しく投資された資本設備 $K_{it}(t)$ に結合される労働力の量を表しているから，前節の (1.13) 式と同様の関係が成立することは明らかである．それ故，

$$L_{it}(t)=\frac{n_i+\delta_i}{1-e^{-\theta_i(n_i+\delta_i)}}L_0e^{n_it}\equiv L_iL_0e^{n_it}$$

$$L_i\equiv\frac{n_i+\delta_i}{1-e^{-\theta_i(n_i+\delta_i)}} \qquad i=1,\ 2 \tag{2.25}$$

が求められる．ところで，(2.7) より $L(t)$ は $n$ の率で成長しているから，$\sum_i L_i(t)$ も $n$ で成長しなくてはならない．同様にして，(2.8) から $L_{it}(t)$ も $n$ で成長しなければならないことが要求される．それ故，(2.25) 式の $n_i$ は $n$ に等しいとしておくことができる．

土地についても労働力と同様のことが成立し，

$$A_t(t)=\frac{k+\delta_2}{1-e^{-\theta_2(k+\delta_2)}}A_0e^{kt}\equiv AA_0e^{kt}$$

$$A\equiv\frac{k+\delta_2}{1-e^{-\theta_2(k+\delta_2)}} \tag{2.26}$$

と書ける．ただし，$A_t(t)$ は $K_{2t}(t)$ に結合される土地面積を表す．

以上，求められた結果を整理すれば以下の如くである．

$$Q_{it}(t)=Q_iQ_{0i}e^{g_it},$$

$$K_{1t}(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}Q_{01}e^{g_it}$$

$$K_{2t}(t)=\frac{\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}Q_{01}e^{g_it},\quad Q_i(t)=Q_{0i}e^{g_it}$$

$$L_{it}(t)=L_iL_0e^{nt},\quad A_t(t)=AA_0e^{kt},\quad i=1,\ 2$$

このモデルに持続的成長解が存在するためには，

$$g_1=\lambda_1+n \tag{2.27}$$

$$g_2=\frac{\beta_2(\lambda_2+n)+\alpha_2(\lambda_1+n)}{\alpha_2+\beta_2}=k \tag{2.28}$$

が成立することが必要十分条件となることがわかる.数注11) つまり，生産財部門の成長率 $g_1$ は労働の増加率 $n$ とその部門の技術進歩率 $\lambda_1$ の和で与えられ，農業部門の成長率 $g_2$ は労働の増加率 $n$ と農業部門の技術進歩率 $\lambda_2$ だけでなく，興味深いことに生産財部門の技術進歩率 $\lambda_1$ の影響を受けているのである．尚，両部門の経済成長率は共に，貯蓄性向 $s$ 及び資本設備の物理的減耗率 $\delta_1$ からは独立である．また，$g_1$ 及び $g_2$ が (2.27) 及び (2.28) を満足する場合に限って，初期値 $Q_{0i}$ は一定値をとり得る．ちなみに，$Q_{0i}$ は次式，

$$Q_{01}=\frac{1}{Q_1}\cdot L_0L_1\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}\right)^{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}$$

$$Q_{02}=\frac{1}{Q_2}\left(\frac{\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}{1+\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)N}Q_{01}\right)^{\alpha_2}\cdot(L_0L_2)^{\beta_2}\cdot(A_0A)^{\gamma}$$

で与えられる．

ところで，前節の (1.16) 式と (2.28) 式とを比較すれば，この経済に於ては持続的成長解が存在するために，農業部門に対して前節以上の厳しい条件が課せられていることがわかる．

(a)　資本設備の経済寿命の決定

前節にならって，$\Pi_{iv}(t)$ をヴィンテッジ $v$ の資本設備が $t$ 時点の生産からあげる quasi-rent とすれば，

$$\Pi_{1v}(t)=Q_{1v}(t)-\omega(t)L_{1v}(t) \tag{2.29}$$

$$\Pi_{2v}(t)=P(t)Q_{2v}(t)-\omega(t)L_{2v}(t)-a(t)A_v(t)$$

が成立する．第1部門及び第2部門の資本設備の経済寿命を各々 $\theta_1$，$\theta_2$ とすれば，$(t-\theta_1)$，$(t-\theta_2)$ のヴィンテッジの資本設備はもはや正の利潤をあげることのできない最古の資本設備であるから，

$$\Pi_{1t-\theta_1}(t)=Q_{1t-\theta_1}(t)-\omega(t)L_{1t-\theta_1}(t)=0$$
$$\Pi_{2t-\theta_2}(t)=P(t)Q_{2t-\theta_2}(t)-\omega(t)L_{2t-\theta_2}(t)-a(t)A_{t-\theta_2}(t)=0 \qquad (2.30)$$

が成立する．ところで，(2.14)，(2.17)，(2.19)，(2.27) 及び (2.28) を用いて $\omega(t)$，$a(t)$ を変形すれば，

$$\omega(t)=\begin{cases}\beta_1\dfrac{Q_{1t}(t)}{L_{1t}(t)}=\beta_1\dfrac{Q_1Q_{01}}{L_1L_0}e^{\lambda_1 t}\\ P(t)\beta_2\dfrac{Q_{2t}(t)}{L_{2t}(t)}=\beta_2\dfrac{1-s}{s}\cdot\dfrac{Q_2Q_{01}}{L_2L_0}\cdot e^{\lambda_1 t}\end{cases}$$

$$a(t)=P(t)\frac{\partial Q_{2t}(t)}{\partial A_t(t)}=P(t)\gamma\frac{Q_{2t}(t)}{A_t(t)}=\gamma\frac{1-s}{s}\cdot\frac{Q_2Q_{01}}{AA_0}e^{(g_1-k)t}$$

となり，賃金率 $\omega(t)$ は第1部門（生産財部門）の技術進歩率 $\lambda_1$ と同率で上昇することがわかる．これらを先の (2.30) に代入して整理すれば $\theta_1$，$\theta_2$ が求められる．[数注12)]

$$\theta_1=-\frac{1}{\lambda_1}l_n\beta_1 \qquad (2.31)$$

$$\theta_2=\frac{1}{g_2-n}l_n\frac{1-\gamma}{\beta_2}=\frac{1-\gamma}{\alpha_2\lambda_1+\beta_2\lambda_2}l_n\frac{1-\gamma}{\beta_2} \qquad (2.32)$$

これより，第1部門の資本設備の経済寿命 $\theta_1$ は当該部門の技術進歩率 $\lambda_1$ と労働の所得分配率 $\beta_2$ に依存し，第2部門（農業部門）の資本設備の経済寿命 $\theta_2$ は当該部門の技術進歩率 $\lambda_2$ と労働，資本及び土地の所得分配率 $\beta_2$，$\alpha_2$，$\gamma$ のほかに，第1部門の技術進歩率 $\lambda_1$ にも依存していることがわかる．

(b) 技術進歩率 $\lambda_i$ の経済寿命 $\theta_i$ に及ぼす影響

(2.31)，(2.32) を各々 $\lambda_1$，$\lambda_2$ で偏微分して，

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda_1}=\frac{1}{\lambda^2}l_n\beta_1<0$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_1}=-\frac{\alpha_2(1-\gamma)}{(\alpha_2\lambda_1+\beta_2\lambda_2)^2}l_n\frac{1-\gamma}{\beta_2}<0$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_2}=-\frac{\beta_2(1-\gamma)}{\alpha_2\lambda_1+\beta_2\lambda_2}l_n\frac{1-\gamma}{\beta_2}<0$$

を得る．

(c) 労働の所得分配率 $\beta_i$ の経済寿命 $\theta_i$ に及ぼす影響

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta_1}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\beta_1}<0$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta_2}=-\left\{\frac{\lambda_2(1-\gamma)}{(\alpha_2\lambda_1+\beta_2\lambda_2)^2}l_n\frac{1-\gamma}{\beta_2}+\frac{1-\gamma}{\beta_2(\alpha_2\lambda_1+\beta_2\lambda_2)}\right\}<0$$

を得る．

以下同様にして，$\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_2}<0$，$\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\gamma}<0$ 等も得られるが紙幅の都合上省略した．また資本設備の総数及び平均年齢についても，1部門分析の場合と同様，総数及び年齢の集計値は $g_1$ で成長し，貯蓄性向 $s$ に比例しており，平均年齢は時間に関係なく一定であることが容易に示される．

## お わ り に

以上，われわれのモデルに於ては，土地という農業に特有な生産要素が労働や資本に比して，相対的に農業の持続的成長（Steady Growth）に対する厳しい制限条件となっていることが示された．つまり，よほど土地面積の拡大や土地生産性の増大を図り，$k$ の引きあげを企図しない限り，われわれのモデルには持続的成長解が存在し得ないことが (1.16) 及び (2.28) によって示されている．もっとも，持続的成長とは「神話の事態（Golden Age)」(J. Robinson) であり，甚だトリッキーな概念だといえないこともないが，少なくともより現実的なモデルの重要な基礎概念であることに異論はなかろう．[11)]

* 本稿は卒業論文の一部を改訂，発展させたものである．その際，大西治男（京都大学）山口三十四（神戸大学）両氏から有益なコメントを頂いたことに感謝する．

注1）Allen, R. G. D.〔1〕(訳) p.347
2）Uzawa, H.〔9〕参照
3）以下の手法に関しては Kemp, M. C.=Thānh, P. C.〔4〕, 木下公士〔5〕を参照のこと．
4）Kemp, M. C.=Thānh, P. C.〔4〕pp.259～60
5）4）に同じ．
6）木下公士〔5〕p.19参照
7）Allen, R. G. D.〔1〕(訳) pp. 356～358参照
8）7）に同じ．p.357
9）解法については数学的補注1を参照
10）解法については数学的補注2を参照
11）Allen, R. G. D.〔1〕(訳) 第11章参照

数 学 的 補 注

1. $$\frac{d}{dt}Q(t)=-\delta e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}Q_v(v)dv+e^{-\delta t}\cdot\Big[e^{\delta v}Q_v(v)\Big]_{t-\theta}^{t}$$

$$=-\delta Q(t)+e^{-\delta t}\{e^{\delta t}Q_t(t)-e^{\delta(t-\theta)}\cdot Q_{t-\theta}(t-\theta)\}$$

$$=-\delta Q(t)+Q_t(t)-e^{-\delta\theta}Q_{t-\theta}(t-\theta)$$

(1.9) より $\frac{d}{dt}Q(t)=gQ_0e^{gt}$ を代入して,

$$Q_t(t)-e^{-\delta\theta}Q_{t-\theta}(t-\theta)=(g+\delta)Q_0e^{gt}$$

2. 非同次項 $Kb^t$ に基づく特解は, $b$ が重複度 $m$ の特性根である時, $\frac{K}{\overset{(m)}{f}(b)}t^m b^{t-m}$ で与えられる. ただし, $\overset{(m)}{f}(b)$ は特性方程式の左辺を $m$ 回微分して, 変数 $b=\lambda$ を代入したものをいう. ところで, $K=(g+\delta)Q_0$, $b=e^g$ を代入すると, $b=e^g$ は特性根ではないからその重複度は $m=0$ である. 故に特解は,

$$\frac{(g+\delta)Q_0}{e^{g\theta}-e^{-\delta\theta}}e^{gt}=\frac{g+\delta}{1-e^{-\theta(g+\delta)}}Q_0e^{g(t-\theta)}$$

となる.

3. (1.10), (1.11), (1.13), (1.15)及び(1.16)を

$$Q_t(t)=e^{\lambda\beta t}K_t(t)^{\alpha}L_t(t)^{\beta}A_t(t)^{\gamma},\quad \alpha+\beta+\gamma=1$$

に代入すれば,

$$QQ_0e^{gt}=e^{\lambda\beta t}(sQ_0e^{gt})^{\alpha}(LL_0e^{nt})^{\beta}(AA_0e^{kt})^{\gamma}$$

故に, $Q_0^{1-\alpha}=Q_0^{\beta+\gamma}=\frac{1}{Q}s^{\alpha}(LL_0)^{\beta}(AA_0)^{\gamma}e^{(\lambda\beta+g\alpha+n\beta+k\gamma-g)t}$

ところで, $\lambda\beta+g\alpha+n\beta+k\gamma-g=(\lambda+n)\{(\alpha+\beta+\gamma)-1\}=0$

故に $Q_0$ は一定となる.

4. $\omega(t)=\beta\frac{Q_t(t)}{L_t(t)}=\beta\frac{(g+\delta)(1-e^{-\theta(n+\delta)})Q_0}{(n+\delta)(1-e^{-\theta(g+\delta)})L_0}\cdot e^{(g-n)t}$

ところで, $g=\lambda+n$ であるから上式に代入して, (1.20′) を得る.

5. $QQ_0e^{g(t-\theta)}-\beta\frac{QQ_0}{LL_0}e^{\lambda t}\cdot LL_0e^{n(t-\theta)}-\gamma\frac{Q_0}{A_0}\cdot QA_0e^{g(t-\theta)}=0$

$$Q_t(t)(e^{-g\theta}-\beta e^{-n\theta}-\gamma e^{-g\theta})=0$$

$Q_t(t)\neq 0$ 故に, $(1-\gamma)e^{-g\theta}=\beta e^{-n\theta}$

6. $\lambda^2>0$, $1-\gamma=\alpha+\beta>\beta$ より $l_n(1-\gamma)>l_n\beta$

故に, $l_n\frac{1-\gamma}{\beta}=l_n(1-\gamma)-l_n\beta>0$

よって, $\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}<0$ を得る.

7. $K(t)=\int_{t-\theta}^{t}K_v(t)dv=e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}K_v(v)dv$

$$=e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}(sQ_0e^{gv})dv$$

これより, $K(t)=sQ_0e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{(g+\delta)v}dv$ を得る.

右辺を計算すれば,

$K(t)=\frac{sQ_0}{(g+\delta)}e^{gt}(1-e^{-\theta(g+\delta)})$ を得る.

8. $\int_{t-\theta}^{t}(t-v)K_v(t)dv=t\int_{t-\theta}^{t}K_v(t)dv-\int_{t-\theta}^{t}v\cdot K_v(t)dv$

$$=tK(t)-e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}e^{\delta v}\cdot v\cdot K_v(v)dv$$

$$=tK(t)-sQ_0e^{-\delta t}\int_{t-\theta}^{t}v\cdot e^{(g+\delta)v}dv$$

ところで, 右辺第2項を部分積分すれば

$$sQ_0e^{-\delta t}\left[\frac{v}{g+\delta}e^{(g+\delta)v}-\frac{1}{g+\delta}\int_{t-\theta}^{t}e^{(g+\delta)v}dv\right]_{t-\theta}^{t}$$

$$=sQ_0e^{-\delta t}\left[\frac{v}{g+\delta}e^{(g+\delta)v}-\frac{1}{(g+\delta)^2}e^{(g+\delta)v}\right]$$

$$=tK(t)+\frac{sQ_0}{g+\delta}e^{gt}\left\{\frac{1}{g+\delta}(1-e^{-\theta(g+\delta)})-\theta e^{-\theta(g+\delta)}\right\}$$

となる. 故に (1.29) 式が得られる.

9. $\rho_{iv}(t)$ をヴィンテッジ $v$ の資本設備を用いて得られる第 $i$ 部門の $t$ 時点の利潤率とすれば, $v=t$ の場合は,

$$\rho_{iv}(t)=P_i(t)\cdot\frac{\partial Q_{it}(t)}{\partial K_{it}(t)}=\frac{\Pi_{it}(t)}{K_{it}(t)},$$

$$\rho_{1v}(t)=\rho_{2v}(t)$$

が成立する. それは, われわれが zero-foresight の立場に立っているからである. しかし, $v<t$ の場合は, 両部門に於ける $\rho_{iv}(t)$ は必ずしも等しくならない. なぜなら, 両部門の資本設備の経済寿命 $\theta_i$ が異なるからである.

10. $K_{2t}(t)=\frac{\Pi_{2t}(t)}{\Pi_{1t}(t)}\cdot K_{1t}(t)$ に(2.22)を代入して,

$$K_{2t}(t)=\left\{\frac{P(t)Q_{2t}(t)-\omega(t)L_{2t}(t)-a(t)A_t(t)}{Q_{1t}(t)-\omega(t)L_{1t}(t)}\right\}\cdot K_{1t}(t)$$

を得る. これに, (2.14), (2.17), (2.19), (2.20) を代入して整理すると,

$$K_{2t}(t)=\left\{\frac{(1-\beta_2-\gamma)P(t)Q_{2t}(t)}{(1-\beta_1)Q_{1t}(t)}\right\}K_{1t}(t)$$

$$=\left(\frac{\alpha_2P(t)Q_{2t}(t)}{\alpha_1Q_{1t}(t)}\right)K_{1t}(t)=\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)NK_{1t}(t)$$

が得られる．

11．①$g_1-\lambda_1\beta_1-\alpha_1 g_1-n\beta_1$

$$=(1-\alpha_1)g_1-(\lambda_1+n)\beta_1$$
$$=(1-\alpha_1-\beta_1)g_1$$
$$=0$$

故に $Q_{01}$ は一定．

②$g_2-(\lambda_2+n)\beta_2-g_1\alpha_2-g_2\gamma$

$$=(1-\gamma)g_2-\{(\lambda_2+n)\beta_2+g_1\alpha_2\}$$
$$=(1-\gamma)\left[g_2-\frac{1}{1-\gamma}\{(\lambda_2+n)\beta_2+g_1\alpha_2\}\right]$$
$$=0 \quad (\because 1-\gamma=\alpha_2+\beta_2)$$

故に $Q_{02}$ は一定．

12．①$Q_1Q_{01}e^{g_1(t-\theta_1)}-\beta_1\frac{Q_1Q_{01}}{L_1L_0}e^{\lambda_1 t}\cdot$

$$L_1L_0e^{n(t-\theta_1)}=0$$

$Q_1Q_{01}e^{g_1 t}(e^{-g_1\theta_1}-\beta_1 e^{-n\theta_1})=0$．ところで $Q_1Q_{01}e^{g_1 t}\neq 0$ であるから，（　）の中がゼロになる．その自然対数をとって $\theta_1$ を求めると，

$$\theta_1=-\frac{1}{g_1-n}l_n\beta_1=-\frac{1}{\lambda_1}l_n\beta_1$$

を得る．

②$\frac{1-s}{s}\frac{Q_{01}}{Q_{02}}e^{(g_1-g_2)t}\cdot Q_2Q_{02}e^{g_2(t-\theta_2)}-\beta_2\frac{1-s}{s}\cdot$

$$\frac{Q_2Q_{01}}{L_2L_0}e^{\lambda_1 t}\cdot L_2L_0e^{n(t-\theta_2)}-\gamma\frac{1-s}{s}\cdot\frac{Q_2Q_{01}}{AA_0}\cdot$$
$$e^{(g_1-k)t}\cdot AA_0e^{k(t-\theta_2)}=0$$

これより，

$$\frac{1-s}{s}Q_2Q_{01}e^{g_1 t}(e^{-g_2\theta_2}-\beta_2 e^{-n\theta_2}-\gamma e^{-g_2\theta_2})=0$$

を得る．（　）$=0$ とおいて $(1-\gamma)e^{-g_2\theta_2}=\beta_2 e^{-n\theta_2}$ と変形し，両辺の自然対数をとって整理すれば（2.32）が得られる．

## 参考文献

〔1〕Allen, R. G. D. Macro-Economic Theory, A Mathematical Treatment, Macmillan, 1967『現代経済学』（渡部経彦・新開陽一訳），東洋経済新報社，1968

〔2〕Bergstrom, A. R. The Construction and Use of Economic Models, The English University Press, London, 1967

〔3〕Johansen, L. "Substitution Versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth", Econometrica, Vol. 27, No. 2, 1959

〔4〕Kemp, M. C. and Thānh, P. C. "On a Class of Growth Models", Econometrica, Vol. 34, No. 2, 1966

〔5〕木下公士「技術進歩と経済成長のヴィンティジ分析」『農業経済研究』1968年6月

〔6〕佐藤隆三『経済成長の理論』勁草書房，1968

〔7〕Solow, R. M. "Investment and Technical Progress", Mathematical Methods in the Social Sciences (eds. Arrow, Karlin and Suppes, 1960)

〔8〕Phelps, E. S. "Substitution, Fixed Production, Growth and Distribution", International Economic Review, Sept., 1963

〔9〕Uzawa, H. "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium", Review of Economic Studies, Feb., 1961

〔10〕Fisher, F. M. "Embodied Technical Change and the Existence of an Aggregate Capital Stock" Review of Economic Studies, Oct., 1965