# 材積式の定数の解法について


| | |
|---|---|
| 誌名 | 日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society |
| ISSN | 0021485X |
| 著者 | 前沢, 完次郎<br>芳賀, 敏郎 |
| 巻/号 | 59巻7号 |
| 掲載ページ | p. 245-252 |
| 発行年月 | 1977年7月 |

日林誌　59(7)'77　　245〜252

論　文

# 材積式の定数の解法について

前沢完次郎*・芳賀敏郎**

前沢完次郎・芳賀敏郎：材積式の定数の解法について　日林誌 59: 245〜252, 1977
幹材積を$V$，胸高直径を$D$，樹高を$H$とした材積式（1）$V=aD^bH^c$，（2）$V=AD^B$における定数 $a, b, c ; A, B$ のもとめ方として，（i）従来の手法による最小2乗法，（ii）実験的回帰分析，（iii）重みを $V^2$ とした最小2乗法，（iv）重みを$V$とした最小2乗法の四つの方法をとりあげ，林況をことにした四つのスギ人工林から収集したデータについて，それらを適用した結果を比較検討した。対数回帰式による材積の推定値とその真値をそれぞれ $\widehat{\log V}$，$\hat{V}$ とし，$S_e=\Sigma(\log V-\widehat{\log V})^2$，$S_e'=\Sigma(V-\hat{V})^2$ として，定数をもとめたもとのデータに対するあてはまり方をみると，そのよしあしについて，$S_e$の大きさを尺度とするならば，（i）が明らかにすぐれているが，$S_e'$の大きさによって調べると，(iii) あるいは (iv) など重みを考慮した最小2乗法がよい結果をあたえている。また，各方法による定数をもとのデータ以外のデータにあてはめると，$S_e$ と $S_e'$ についてともに方法によるちがいは明らかではないが，この場合（2）式については，あてはめのよしあしが，林分によって大きくことなる結果がみられる。

MAEZAWA, Kanjiro & HAGA, Toshiro: **Method of estimating parameters in volume equations J. Jap. For. Soc. 59: 245〜252, 1977** The equations of (1) (volume)$=a$(d. b. h.)$^b$ (height)$^c$ and (2) (volume)$=A$(d. b. h.)$^B$ are considered as representative expressions to derive volume from a single variable and from two variables, respectively. Here, $a$, $b$, $c$, $A$ and $B$ are the parameters in each equation. To estimate the parameters, the following four approaches were studied by using the data collected from four artificial stands. (i) Ordinary way of solution by method of least squares. (ii) Experimental regression analysis. (iii) Method of least squares in which square of volume is considered as weight. (iv) Method of least squares in which volume is considered as weight. Regarding applicability to original data by which the parameters were calculated, the method (i) showed the best results in logarithmic calculations, however, the methods (iii) and (iv) showed better results than the method (i) in calculations of actual values. Differences among the methods were not always clear when they applied to other data except original data, in both calculations of logarithms and actual values. Moreover, the results in this case showed that the applicability to the equation (2) was remarkably affected by properties of stands.

## I　ま　え　が　き

材積式については，古くから多くの研究が行なわれ，数多くの実験式が提案されている。それらの中で，従来から広く用いられているものとして，2変数については次に示す（1・a）式を，1変数については（1・b）式を，それぞれあげることができるであろう(2)。

$$V=aD^bH^c \qquad (1\cdot a)$$

$$V=AD^B \qquad (1\cdot b)$$

ここに，$D$は胸高直径，$H$は樹高であり，$V$は幹材積である。また，$a, b, c ; A, B$ は定数である。

（1）式における定数を決定する場合，従来から用いられている解法は，それぞれその両辺の対数をとって（2）式とし，（3）式の残差2乗和 $S_e$ を最小にする方法（最小2乗法）である。

$$\widehat{\log V}=\log a+b\log D+c\log H \qquad (2\cdot a)$$

$$\widehat{\log V}=\log A+B\log D \qquad (2\cdot b)$$

$$S_e=\Sigma(\log V_i-\widehat{\log V_i})^2 \longrightarrow \min \qquad (3)$$

ここに，$\widehat{\log V_i}$ は$V$の実測値 $V_i$ の対数の推定値を示すが，この場合数学上の保証は，（3）式における $S_e$ を最小にすることであって，それは真数（$V$）の世界についてのものではない。

* 東京大学農学部演習林　Tokyo Univ. For., Tokyo 113
** 山陽国策パルプ株式会社　Sanyo-kokusaku Pulp Co., Ltd., Tokyo 100

（2）式のように対数に展開することは，大きい材積値を相対的に小さい値におきかえることになり，したがって，（3）式の $S_e$ が最小になるような $a, b, c$ または $A, B$ を推定することは，相対的に小さい材積値に重みをかけた定数の決定法とも考えられるから，実際的な観点からは，それが最適の方法であるかどうか問題が生じてくる。

このような解法とは別に，実用上からは真数の世界での残差2乗和が最小になるような $a, b, c$ または $A, B$ を推定する方法も考えることができる。この場合，残差2乗和は

$$S_e'=\Sigma(V_i-\hat{V}_i)^2 \longrightarrow \min \qquad (4)$$

としてあたえられることになるが，その解法を解析的にもとめることは困難である。そのため，近似的な解法を用いることにすれば，そのひとつとして考えられる方法は，残差2乗和として（3）式を想定するのではなく，（5）式に示すようななんらかの重み$W$をそこにとり入れる方法である。

$$S_e''=\Sigma W_i(\log V_i-\widehat{\log V_i})^2 \longrightarrow \min \qquad (5)$$

また，実測値のままでの扱いを可能とする実験的回帰分析 (4) の利用も考えられる。最小2乗法の利用については，関数形が非線形である場合，そのままの形では簡単に定数の値をもとめることができないが，実験的回帰分析は任意の関数形や任意の誤差評価関数に対しても利用することができる。

この報文は，材積式として（1）式をとりあげ，いくつかの供試林分について，従来の手法による最小2乗法，残差2乗和を（5）式のように重みを考慮した最小2乗法，および実験的回帰分析のそれぞれを適用し，材積式の定数決定法としてこれらの方法を比較検討したものである。

この研究を進めるにあたり，実験的回帰分析の適用についてご教示をいただいた青山学院大学田口玄一教授にこころから感謝する。

## II データ

用いたデータは，東京大学千葉演習林において，スギ人工林の林分構造を解析するために収集されたものである。調査の対象となった4林分は，ともに林齢55年の一斉林であるが，表-1に示すとおりその林況はかなり相違している。

測定は，それら4林分にそれぞれ調査区（1区～4区）を設け，区内の立木をすべて伐倒して行なわれた。すなわち，直径測定は2方向，0.1cm単位とし，その測定部位は，（i）樹高14m未満については，根元から0.3

表-1. 供試林分

| 調査区 No. | 樹種 | 林齢 (年) | 平均胸高直径 (cm) | 平均樹高 (m) | 本数/ha | 材積/ha (m³) | 調査区面積 (ha) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | スギ | 55 | 21.8 | 16.68 | 1,094 | 410.0 | 0.085 |
| 2 | スギ | 55 | 17.6 | 13.90 | 1,217 | 254.6 | 0.092 |
| 3 | スギ | 55 | 32.6 | 19.53 | 459 | 414.3 | 0.109 |
| 4 | スギ | 55 | 12.9 | 8.55 | 1,196 | 89.6 | 0.046 |

m，1.3m，2.3m，以下1m間隔，また，（ii）樹高14m以上については，0.3m，1.3m，2.3m，以下2m間隔とした。樹高測定はcm単位として，伐倒後に実測した。また，幹材積は移動平均法にもとづく求積法 (3) によってもとめた。（i），（ii）の場合について用いた求積式は，それぞれ［対象の基部より最初の測点までの距離 $X=0.3$m，測点間隔 $h=1$m，(積分用係数：5点，3次)］，［$X=0.3$m，$h=2$m，(5点，3次)］である。

## III 解　法

### 1. 従来の解法

データの収集は，1区～4区の4林分について行なわれたが，いま，それらのデータを合わせたものを便宜的にひとつの区とみなし，これを全体区とよぶことにする。

このような区ごとのデータに対して，$S_e$ を（3）式とした従来からの手法による最小2乗法（以下LSMと略記する）を適用すると，表-2，LSM欄の結果がもとめられる。

同表中，$n$は区ごとに調査された立木本数であり，全変動 $S_T'$，式の誤差変動 $S_e'$，寄与率 $\rho'$，誤差分散 $V_e'$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\left.\begin{aligned} &S_T'=\Sigma(V_i-\bar{V})^2,\ \bar{V}=\Sigma V_i/n \\ &S_e'=\Sigma(V_i-\hat{V}_i)^2 \\ &\rho=1-\frac{S_e'}{S_T'} \\ &V_e'=S_e'/f_e \quad (f_e \text{ は自由度}) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

参考までに，対数の世界での扱いとして，$\log\hat{V}$ についてのそれらの値をもとめてみると，表-3，LSM欄のとおりである。この場合，$S_T, S_e, \rho, V_e$ はそれぞれ次式で定義される。

$$\left.\begin{aligned} &S_T=\Sigma(\log V_i-\overline{\log V})^2 \\ &S_e=\Sigma(\log V_i-\widehat{\log V_i})^2 \\ &\rho=1-\frac{S_e}{S_T} \\ &V_e=S_e/f_e \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

回帰の寄与率は，真数の場合（1・a）式については98%以上，また（1・b）式については95%以上の値を示しているが，対数の場合にはさらに高い値をとり，（1・a），（1・b）式について，それぞれ99%以上，97%以

表-2. 各解法による適用結果（真数）

| 区<br>立木本数<br>全変動 | 定数<br>誤差変動<br>寄与率 | (1・a) 式 LSM | (1・a) 式 ERA | (1・a) 式 WLSM (i) | (1・a) 式 WLSM (ii) | (1・b) 式 LSM | (1・b) 式 ERA | (1・b) 式 WLSM (i) | (1・b) 式 WLSM (ii) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $10^5\times a$ | 7.8163 | 8.7695 | 9.5240 | 8.5167 | | | | |
| 1区 | $b$ | 1.8972 | 1.8750 | 1.8241 | 1.8473 | | | | |
| | $c$ | 0.8917 | 0.8750 | 0.9061 | 0.9174 | | | | |
| | $10^4\times A$ | | | | | 2.3922 | 1.3984 | 4.3299 | 3.2060 |
| $n=93$ | $B$ | | | | | 2.3508 | 2.4961 | 2.1698 | 2.2593 |
| $S_T'=5.84$ | $10^2\times S_e'$ | 4.70 | 4.13 | 3.98 | 4.04 | 16.90 | 26.58 | 10.87 | 11.94 |
| | $10^2\times\rho'$ | 99.2 | 99.3 | 99.3 | 99.3 | 97.1 | 95.4 | 98.1 | 98.0 |
| | $10^4\times V_e'$ | 5.22 | 4.48 | 4.42 | 4.48 | 18.58 | 28.90 | 11.95 | 13.12 |
| | $10^5\times a$ | 6.1702 | 8.7500 | 6.8750 | 6.2734 | | | | |
| 2区 | $b$ | 1.9628 | 1.8711 | 1.7968 | 1.8603 | | | | |
| | $c$ | 0.8989 | 0.8711 | 1.0453 | 1.0063 | | | | |
| | $10^4\times A$ | | | | | 1.6823 | 1.8281 | 2.8775 | 2.1714 |
| $n=112$ | $B$ | | | | | 2.4405 | 2.4062 | 2.2670 | 2.3560 |
| $S_T'=2.26$ | $10^2\times S_e'$ | 3.32 | 2.87 | 2.78 | 2.86 | 6.97 | 6.23 | 5.64 | 5.88 |
| | $10^2\times\rho'$ | 98.5 | 98.7 | 98.8 | 98.7 | 96.9 | 97.2 | 97.5 | 97.4 |
| | $10^4\times V_e'$ | 3.04 | 2.59 | 2.55 | 2.62 | 6.34 | 5.62 | 5.13 | 5.34 |
| | $10^5\times a$ | 8.5035 | 8.7500 | 6.7922 | 7.4198 | | | | |
| 3区 | $b$ | 1.9892 | 1.8730 | 2.0093 | 1.9871 | | | | |
| | $c$ | 0.7446 | 0.8731 | 0.7969 | 0.7935 | | | | |
| | $10^4\times A$ | | | | | 1.1537 | 1.6562 | 1.1443 | 1.1907 |
| $n=50$ | $B$ | | | | | 2.5366 | 2.4414 | 2.5448 | 2.5312 |
| $S_T'=14.98$ | $10^2\times S_e'$ | 16.74 | 17.15 | 15.50 | 15.57 | 53.62 | 56.04 | 54.31 | 53.45 |
| | $10^2\times\rho'$ | 98.9 | 98.9 | 99.0 | 99.0 | 96.4 | 96.3 | 96.4 | 96.4 |
| | $10^4\times V_e'$ | 35.61 | 34.98 | 32.98 | 33.14 | 111.71 | 114.38 | 113.15 | 111.36 |
| | $10^5\times a$ | 8.6278 | 8.4375 | 10.0937 | 9.0149 | | | | |
| 4区 | $b$ | 1.9112 | 1.8809 | 1.7497 | 1.8650 | | | | |
| | $c$ | 0.8088 | 0.8496 | 0.9401 | 0.8462 | | | | |
| | $10^4\times A$ | | | | | 1.6792 | 1.6562 | 2.7648 | 1.8296 |
| $n=55$ | $B$ | | | | | 2.3317 | 2.3281 | 2.1628 | 2.3045 |
| $S_T'=0.18$ | $10^2\times S_e'$ | 0.28 | 0.26 | 0.23 | 0.25 | 0.82 | 0.80 | 0.69 | 0.79 |
| | $10^2\times\rho'$ | 98.5 | 98.6 | 98.8 | 98.6 | 95.5 | 95.6 | 96.2 | 95.7 |
| | $10^4\times V_e'$ | 0.53 | 0.48 | 0.43 | 0.48 | 1.54 | 1.49 | 1.31 | 1.49 |
| | $10^5\times a$ | 7.1433 | 8.7500 | 8.2823 | 7.7580 | | | | |
| 全体区 | $b$ | 1.9039 | 1.8750 | 1.8893 | 1.8678 | | | | |
| | $c$ | 0.9092 | 0.8731 | 0.8757 | 0.9215 | | | | |
| | $10^4\times A$ | | | | | 1.2061 | 1.8281 | 1.9817 | 1.7730 |
| $n=310$ | $B$ | | | | | 2.5429 | 2.4141 | 2.3959 | 2.4252 |
| $S_T'=45.00$ | $10^2\times S_e'$ | 25.89 | 24.57 | 24.48 | 24.38 | 121.67 | 93.35 | 95.85 | 94.23 |
| | $10^2\times\rho'$ | 99.4 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 97.3 | 97.9 | 97.9 | 97.9 |
| | $10^4\times V_e'$ | 8.43 | 7.95 | 7.97 | 7.94 | 39.50 | 30.21 | 31.12 | 30.60 |

表-3. 各解法による適用結果（対数）

| 区<br>立木本数<br>全変動 | 誤差変動<br>寄与率 | (1・a) 式 LSM | (1・a) 式 ERA | (1・a) 式 WLSM (i) | (1・a) 式 WLSM (ii) | (1・b) 式 LSM | (1・b) 式 ERA | (1・b) 式 WLSM (i) | (1・b) 式 WLSM (ii) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1区 | $10^2\times S_e$ | 5.02 | 5.18 | 6.07 | 5.29 | 11.64 | 30.22 | 19.50 | 13.23 |
| $n=93$ | $10^2\times\rho$ | 99.4 | 99.3 | 99.2 | 99.3 | 98.5 | 96.1 | 97.5 | 98.3 |
| $S_T=7.83$ | $10^4\times V_e$ | 5.58 | 5.63 | 6.74 | 5.88 | 12.79 | 32.85 | 21.43 | 14.54 |
| 2区 | $10^2\times S_e$ | 7.88 | 10.50 | 10.49 | 8.48 | 16.42 | 17.05 | 26.07 | 18.23 |
| $n=112$ | $10^2\times\rho$ | 99.2 | 99.0 | 99.0 | 99.2 | 98.4 | 98.3 | 97.4 | 98.2 |
| $S_T=10.12$ | $10^4\times V_e$ | 7.23 | 9.46 | 9.62 | 7.78 | 14.93 | 15.36 | 23.70 | 16.57 |
| 3区 | $10^2\times S_e$ | 3.10 | 3.43 | 3.38 | 3.21 | 12.18 | 13.95 | 12.56 | 12.34 |
| $n=50$ | $10^2\times\rho$ | 99.4 | 99.3 | 99.3 | 99.4 | 97.6 | 97.2 | 97.5 | 97.6 |
| $S_T=5.05$ | $10^4\times V_e$ | 6.60 | 7.00 | 7.19 | 6.83 | 25.38 | 28.47 | 26.17 | 25.71 |
| 4区 | $10^2\times S_e$ | 3.83 | 3.99 | 5.95 | 3.98 | 13.09 | 13.63 | 21.80 | 13.49 |
| $n=55$ | $10^2\times\rho$ | 99.3 | 99.3 | 98.9 | 99.3 | 97.6 | 97.5 | 96.0 | 97.5 |
| $S_T=5.47$ | $10^4\times V_e$ | 7.37 | 7.39 | 11.44 | 7.65 | 24.70 | 25.24 | 41.13 | 25.45 |
| 全体区 | $10^2\times S_e$ | 22.33 | 28.51 | 25.61 | 23.64 | 130.93 | 155.68 | 177.08 | 153.91 |
| $n=310$ | $10^2\times\rho$ | 99.6 | 99.6 | 99.6 | 99.6 | 97.9 | 97.6 | 97.2 | 97.6 |
| $S_T=63.60$ | $10^4\times V_e$ | 7.27 | 9.23 | 8.34 | 7.70 | 42.51 | 50.38 | 57.49 | 49.97 |

上の値を示している。

**2. 実験的回帰分析 (*4*)**

実験的回帰分析（以下 ERA と略記する）によって定数をもとめる場合には，まず未知数についての存在範囲を設定しなければならない。この実験においては，(1・a)，(1・b)式についてのその存在範囲として，それぞれ表-4 に示す値をとった。また，用いる直交表は，(1・a）式については $L_{36}$，(1・b）式については $L_9$ とした。

個々のわりつけについて変動 $S'$ をもとめ，未知数についてそれぞれ3水準間の $S'$ の比較をすることになるが，関数形が非線形の場合，検定に用いる誤差分散 $v_e'$ は，予想寄与率を $\rho_{\exp}'$ とした（8）式によってもとめなければならない。

$$v_e'=\frac{\left(1-\frac{\rho_{\exp}'}{100}\right)\times S_T'}{n-1} \tag{8}$$

ここに用いられる $\rho_{\exp}'$ は，テスト分析*によって（1・a）式については 99%，(1・b）式については 96% が適当と考えられたため，分析に用いられる $v_e'$ は，表-5 のようにもとめられた。

表-4. 初期値の存在範囲

| 未知数 | 水準 1 | 水準 2 | 水準 3 |
|---|---|---|---|
| $10^4\times a$ | 0.5 | 1.0 | 1.5 |
| $b$ | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
| $c$ | 0.5 | 1.0 | 1.5 |
| $10^4\times A$ | 1 | 2 | 3 |
| $B$ | 2.0 | 2.5 | 3.0 |

表-5. 検定に用いる誤差分散

| 式 | 区 1 | 2 | 3 | 4 | 全体 |
|---|---|---|---|---|---|
| (1・a) | $0.63485\times10^{-3}$ | $0.20395\times10^{-3}$ | $0.30576\times10^{-2}$ | $0.33807\times10^{-4}$ | $0.14564\times10^{-2}$ |
| (1・b) | $0.25394\times10^{-2}$ | $0.81582\times10^{-3}$ | $0.12231\times10^{-1}$ | $0.13523\times10^{-3}$ | $0.58256\times10^{-2}$ |

* 1区～4区のなかで比較的本数（$n$）の多かった1区，2区のデータから，それぞれ 2/3 をランダムにえらび，それらを仮にⅠ区，Ⅱ区のデータとしてテスト分析を行なった。

それによると，まず（1・a）式については，Ⅰ区のデータに対して $\rho_{\exp}'$ を 98%，96%，92% と3通りに変えたそれぞれの場合において，$\rho'=99.3\%$ の結果がえられた。その結果にもとづいて，次にⅡ区のデータを用いて，$\rho_{\exp}'$ を 99%，98% として調べたが，この場合においては2通りとも $\rho'=98.6\%$ の結果がえられた。

また，(1・b）式については，Ⅰ区のデータに対して $\rho_{\exp}'$ を 92%，86% としたそれぞれの場合において $\rho'=96.7\%$ であり，Ⅱ区のデータを用いて $\rho_{\exp}'$ を 96%，92% とした場合においてはともに $\rho'=97.0\%$ であった。

このような分析結果は，ERA の適用にさいして，$\rho_{\exp}'$ についてそれほど厳密に考える必要のないことを示しているが，$\rho'$ に近似した $\rho_{\exp}'$ をあらかじめ予想値としてあたえることができれば，そのほうがこのましいことはいうまでもない(*4*)。したがって，1区～全体区の分析においては，検定に用いる $\rho_{\exp}'$ として，(1・a）式については 99% を，(1・b）式については 96% を用いることにした。

区ごとのデータに対して，ERA を適用した結果を示すと表-2，ERA 欄のとおりである。同表に関連して，初期値を表-4 とした各区，各式についての最終段階での未知数の3水準は表-6 のとおりである。

表-2，ERA 欄において，各定数の値は，各場合とも収束した最終段階における第2水準の値を用いてある。したがって，最終段階においてそれに該当した $S'$ の値が，$S_e'$ としてあたえられる。また，この場合 $V_e'$ は

$$V_e'=\frac{S_e'}{n-1} \tag{9}$$

である。

ERA による定数の値を用いて，対数についての数値をもとめてみると，表-3，ERA 欄のとおりである。

$\rho'$ および $\rho$ についてみると，ともに（1・a）式については 98% 以上，(1・b）式については 95% 以上の値を示している。

**3. 重みづき最小2乗法**

最小2乗法における条件式を（5）式とした解法（以下 WLSM と略記する）として，この実験においては，ふたつの場合について検討を加えた。すなわち，(5)式における重みとして，(i) $W_i=V_i^2$ とした場合と，(ii) $W_i=V_i$ とした場合である。

(i)は重みとして，現実の材積値の2乗をとった場合であるが，デミング (*1*) によると，関数式を（2）式とした場合についての適当な重みは $V_i^2$ であることが，理論的に考察されている。

このことは，また次のようにして推察することができる。

いま，$\log \widehat{V_i} \fallingdotseq \log \hat{V}_i$，$V_i=\hat{V}_i+\varDelta V_i$ とおけば

$$\log V_i-\log\widehat{V_i}=-\log\frac{\hat{V}_i}{V_i}=-\log\left(\frac{V_i-\varDelta V_i}{V_i}\right)$$
$$=-\log\left(1-\frac{\varDelta V_i}{V_i}\right)$$
$$\fallingdotseq\frac{\varDelta V_i}{V_i}$$

したがって，$S_e''=\Sigma W_i(\log V_i-\log\widehat{V_i})^2$ の値は，近似的に $S_e''\fallingdotseq\Sigma W_i\left(\frac{\varDelta V_i}{V_i}\right)^2$ とおきかえられるから，$\Sigma(\varDelta V_i)^2$ を最小にするためには，$W_i$ として $V_i^2$ をとることが考えられる。

次に（ii）の場合であるが，これは現実の材積値そのものを重みとした場合である。従来の解法においては $W_i=1$ であり，上記（i）は $W_i=V_i^2$ とした場合であるから，便宜的にそれらの中間的な場合として，このよ

表-6. 最終段階での未知数の3水準

| 水準 | 区 | (1・a) 式 $10^4\times a$ | $10^{-1}\times b$ | $c$ | (1・b) 式 $10^3\times A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.875000000 | 0.187304688 | 0.873046875 | 0.139062500 | 0.249218750 |
| | 2 | 0.873046875 | 0.186914063 | 0.869140625 | 0.181250000 | 0.240234375 |
| | 3 | 0.871093750 | 0.187109375 | 0.871093750 | 0.162500000 | 0.243750000 |
| | 4 | 0.839843750 | 0.187890625 | 0.847656250 | 0.164062500 | 0.232031250 |
| | 全 体 | 0.873046875 | 0.187402344 | 0.872070313 | 0.182031250 | 0.241210938 |
| 2 | 1 | 0.876953125 | 0.187500000 | 0.875000000 | 0.139843750 | 0.249609375 |
| | 2 | 0.875000000 | 0.187109375 | 0.871093750 | 0.182812500 | 0.240625000 |
| | 3 | 0.875000000 | 0.187304688 | 0.873046875 | 0.165625000 | 0.244140625 |
| | 4 | 0.843750000 | 0.188085938 | 0.849609375 | 0.165625000 | 0.232812500 |
| | 全 体 | 0.875000000 | 0.187500000 | 0.873046875 | 0.182812500 | 0.241406250 |
| 3 | 1 | 0.878906250 | 0.187695313 | 0.876953125 | 0.140625000 | 0.250000000 |
| | 2 | 0.876953125 | 0.187304688 | 0.873046875 | 0.184375000 | 0.241015625 |
| | 3 | 0.878906250 | 0.187500000 | 0.875000000 | 0.168750000 | 0.244531250 |
| | 4 | 0.847656250 | 0.188281250 | 0.851562500 | 0.167187500 | 0.233593750 |
| | 全 体 | 0.876953125 | 0.187597656 | 0.874023438 | 0.183593750 | 0.241601563 |

うな重みをとりあげたが，これは個々の実測値についてその材積分だけ本数があったものと想定して，対象林分のデータを処理することを意味している。

区ごとのデータに対して，WLSM を適用した結果を示すと，表-2，3 における WLSM(i) および WLSM (ii) 欄のとおりである。

$\rho'$ および $\rho$ についてみると，(i)，(ii) の場合ともほとんど同じようであるが，$\rho'$ においては (i) の場合が，$\rho$ においては (ii) の場合がそれぞれわずかに高い値を示している。

## IV 結 果

各区のデータに対して，区ごとにもとめた LSM, ERA, WLSM(i)，WLSM (ii) の各解法による定数をそれぞれ適用した場合の $S_e'$ および $S_e$ を示すと，表-7〜10 のとおりである。表-7，8 は回帰式を (1・a) 式とした場合であり，また表-9，10 は (1・b) 式とした場合である。

表-7〜10 において，太字で示した数値は定数をもとめたもとのデータにその定数をあてはめた結果である。たとえば，表-7 において，解法を LSM とした1区の定数欄についてみれば，回帰式を (1・a) 式として，1区のデータについて LSM を適用して定数をもとめ，その定数を用いてもとの1区のデータについての $S_e'$ をもとめると，その値は 0.0470 としてあたえられる。さらにその定数を用いて，2区，…，全体区のデータにあてはめた結果が，以下につづく 0.0323，…，0.2913 として示される。

表-7. $S_e'$ の値 ((1・a) 式の場合)

| 解 法 | データ | 1区の定数 | 2区の定数 | 3区の定数 | 4区の定数 | 全体区の定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LSM | 1 区 | **470** ( 1 ) | 696 (1.48) | 721 (1.53) | 1,814 (3.86) | 482 (1.03) |
| | 2 区 | 323 (1.11) | **332** (1.14) | 327 (1.13) | 583 (2.01) | 290 ( 1 ) |
| | 3 区 | 2,071 (1.24) | 3,425 (2.05) | **1,674** ( 1 ) | 5,082 (3.04) | 1,780 (1.06) |
| | 4 区 | 52 (1.86) | 45 (1.61) | 62 (2.21) | **28** ( 1 ) | 37 (1.32) |
| | 全体区 | 2,913 (1.13) | 4,498 (1.74) | 2,784 (1.08) | 7,507 (2.90) | **2,589** ( 1 ) |
| ERA | 1 区 | **413** ( 1 ) | 537 (1.30) | 448 (1.08) | 1,908 (4.62) | 442 (1.02) |
| | 2 区 | 317 (1.10) | **287** ( 1 ) | 289 (1.01) | 612 (2.13) | 298 (1.04) |
| | 3 区 | 1,726 (1.02) | 1,914 (1.14) | **1,715** (1.02) | 5,599 (3.32) | 1,684 ( 1 ) |
| | 4 区 | 58 (2.23) | 41 (1.58) | 48 (1.85) | **26** ( 1 ) | 52 (2.00) |
| | 全体区 | 2,514 (1.02) | 2,779 (1.13) | 2,500 (1.02) | 8,145 (3.32) | **2,457** ( 1 ) |
| WLSM(i) | 1 区 | 398 ( 1 ) | 414 (1.04) | 862 (2.17) | 1,808 (4.54) | 437 (1.10) |
| | 2 区 | 353 (1.27) | **278** ( 1 ) | 392 (1.41) | 487 (1.75) | 294 (1.06) |
| | 3 区 | 1,806 (1.17) | 1,932 (1.25) | **1,550** ( 1 ) | 7,904 (5.10) | 1,668 (1.08) |
| | 4 区 | 62 (2.70) | 26 (1.13) | 43 (1.87) | **23** ( 1 ) | 48 (2.09) |
| | 全体区 | 2,619 (1.07) | 2,650 (1.08) | 2,847 (1.16) | 10,222 (4.18) | **2,448** ( 1 ) |
| WLSM (ii) | 1 区 | **404** ( 1 ) | 472 (1.17) | 745 (1.84) | 1,825 (4.52) | 437 (1.08) |
| | 2 区 | 319 (1.12) | **286** (1.01) | 346 (1.22) | 556 (1.96) | 284 ( 1 ) |
| | 3 区 | 1,776 (1.14) | 2,301 (1.48) | **1,557** ( 1 ) | 5,928 (3.81) | 1,680 (1.08) |
| | 4 区 | 49 (1.96) | 30 (1.20) | 46 (1.84) | **25** ( 1 ) | 36 (1.44) |
| | 全体区 | 2,548 (1.05) | 3,089 (1.27) | 2,694 (1.11) | 8,334 (3.42) | **2,438** ( 1 ) |

注：表-7〜10 の $S_e'$ または $S_e$ の値は，$10^4\times S_e'$，$10^4\times S_e$ として示してある。

表-8. $S_e$ の値（(1・a）式の場合）

| 解 法 | データ | 1区の定数 | 2区の定数 | 3区の定数 | 4区の定数 | 全体区の定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LSM | 1 区 | **502** ( 1 ) | 615 (1.23) | 927 (1.85) | 1,975 (3.93) | 580 (1.16) |
| | 2 区 | 1,096 (1.39) | **788** ( 1 ) | 886 (1.12) | 1,426 (1.81) | 849 (1.08) |
| | 3 区 | 439 (1.42) | 569 (1.84) | **310** ( 1 ) | 730 (2.35) | 385 (1.24) |
| | 4 区 | 588 (1.54) | 507 (1.32) | 615 (1.61) | **383** ( 1 ) | 419 (1.09) |
| | 全体区 | 2,625 (1.18) | 2,479 (1.11) | 2,738 (1.23) | 4,514 (2.02) | **2,233** ( 1 ) |
| ERA | 1 区 | **518** ( 1 ) | 628 (1.21) | 550 (1.06) | 1,982 (3.83) | 527 (1.02) |
| | 2 区 | 1,319 (1.26) | **1,050** ( 1 ) | 1,141 (1.09) | 1,470 (1.40) | 1,207 (1.15) |
| | 3 区 | 381 (1.11) | 344 (1.00) | **343** ( 1 ) | 826 (2.41) | 355 (1.03) |
| | 4 区 | 846 (2.12) | 609 (1.53) | 703 (1.76) | **399** ( 1 ) | 762 (1.91) |
| | 全体区 | 3,064 (1.16) | 2,631 ( 1 ) | 2,737 (1.04) | 4,677 (1.78) | **2,851** (1.08) |
| WLSM (i) | 1 区 | **607** (1.15) | 528 ( 1 ) | 1,307 (2.48) | 1,302 (2.47) | 529 (1.00) |
| | 2 区 | 1,882 (1.79) | **1,049** ( 1 ) | 1,130 (1.08) | 1,413 (1.35) | 1,060 (1.01) |
| | 3 区 | 404 (1.20) | 468 (1.38) | **338** ( 1 ) | 1,029 (3.04) | 358 (1.06) |
| | 4 区 | 1,201 (2.55) | 471 ( 1 ) | 499 (1.06) | **595** (1.26) | 614 (1.30) |
| | 全体区 | 4,094 (1.63) | 2,516 ( 1 ) | 3,274 (1.30) | 4,339 (1.72) | **2,561** (1.02) |
| WLSM (ii) | 1 区 | **529** ( 1 ) | 537 (1.02) | 1,036 (1.96) | 1,754 (3.32) | 538 (1.02) |
| | 2 区 | 1,398 (1.65) | **848** ( 1 ) | 928 (1.09) | 1,326 (1.56) | 991 (1.17) |
| | 3 区 | 401 (1.25) | 492 (1.53) | **321** ( 1 ) | 819 (2.55) | 370 (1.15) |
| | 4 区 | 747 (1.88) | 531 (1.33) | 432 (1.09) | **398** ( 1 ) | 465 (1.17) |
| | 全体区 | 3,075 (1.30) | 2,408 (1.02) | 2,717 (1.15) | 4,297 (1.82) | **2,364** ( 1 ) |

表-9. $S_e'$ の値（(1・b）式の場合）

| 解 法 | データ | 1区の定数 | 2区の定数 | 3区の定数 | 4区の定数 | 全体区の定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LSM | 1 区 | **1,690** ( 1 ) | 2,186 ( 1.29) | 3,739 ( 2.21) | 21,003 (12.43) | 3,142 ( 1.86) |
| | 2 区 | 1,213 ( 1.74) | **697** ( 1 ) | 987 ( 1.42) | 5,999 ( 8.61) | 846 ( 1.21) |
| | 3 区 | 6,906 ( 1.29) | 5,734 ( 1.07) | **5,362** ( 1 ) | 62,976 (11.74) | 7,410 ( 1.38) |
| | 4 区 | 1,442 (17.59) | 885 (10.79) | 510 ( 6.22) | **82** ( 1 ) | 770 ( 9.39) |
| | 全体区 | 11,251 ( 1.18) | 9,502 ( 1 ) | 10,598 ( 1.12) | 90,060 ( 9.48) | **12,167** ( 1.28) |
| ERA | 1 区 | **2,658** ( 1.31) | 2,333 ( 1.15) | 2,295 ( 1.13) | 23,157 (11.38) | 2,035 ( 1 ) |
| | 2 区 | 758 ( 1.22) | **623** ( 1 ) | 669 ( 1.07) | 6,726 (10.80) | 664 ( 1.07) |
| | 3 区 | 6,118 ( 1.09) | 6,190 ( 1.10) | **5,604** ( 1 ) | 69,593 (12.42) | 5,729 ( 1.02) |
| | 4 区 | 797 ( 9.96) | 781 ( 9.76) | 816 (10.20) | **80** ( 1 ) | 906 (11.33) |
| | 全体区 | 10,331 ( 1.11) | 9,927 ( 1.06) | 9,384 ( 1.01) | 99,556 (10.67) | **9,335** ( 1 ) |
| WLSM (i) | 1 区 | **1,087** ( 1 ) | 2,086 ( 1.92) | 3,475 ( 3.20) | 26,945 (24.79) | 1,810 ( 1.67) |
| | 2 区 | 1,664 ( 2.95) | **564** ( 1 ) | 906 ( 1.61) | 6,945 (12.31) | 761 ( 1.35) |
| | 3 区 | 8,543 ( 1.57) | 10,540 ( 1.94) | **5,431** ( 1 ) | 95,048 (17.50) | 5,952 ( 1.10) |
| | 4 区 | 2,002 (29.01) | 1,007 (14.59) | 570 ( 8.26) | **69** ( 1 ) | 1,062 (15.39) |
| | 全体区 | 13,296 ( 1.39) | 14,197 ( 1.48) | 10,382 ( 1.08) | 129,007 (13.46) | **9,585** ( 1 ) |
| WLSM (ii) | 1 区 | **1,194** ( 1 ) | 2,009 ( 1.68) | 3,439 ( 2.88) | 21,470 (17.98) | 2,065 ( 1.73) |
| | 2 区 | 1,270 ( 2.16) | **588** ( 1 ) | 896 ( 1.52) | 5,990 (10.19) | 693 ( 1.18) |
| | 3 区 | 6,927 ( 1.30) | 6,948 ( 1.30) | **5,345** ( 1 ) | 66,619 (12.46) | 5,745 ( 1.07) |
| | 4 区 | 1,635 (20.70) | 899 (11.38) | 563 ( 7.13) | **79** ( 1 ) | 921 (11.66) |
| | 全体区 | 11,026 ( 1.17) | 10,444 ( 1.11) | 10,243 ( 1.09) | 94,158 ( 9.99) | **9,423** ( 1 ) |

同様にして，解法をERAとした場合についてみれば，回帰式を（1・a）式として，1区のデータについてERAを適用して定数をもとめ，その定数を用いてもとの1区のデータについての $S_e'$ をもとめると，$S_e'=0.0413$ であり，その定数を2区のデータにあてはめた結果が $S_e'=0.0317$ としてあたえられる。

表-7～10 において，括弧に示した数値は，各解法，各データについて定数ごとにもとめた $S_e'$ あるいは $S_e$ のうち，最も小さい値を1とした比の値である。

## V 考 察

まず，定数をもとめたもとのデータに対する各解法のあてはまり方を比較してみよう。

$S_e$ の大きさを示す表-8 および表-10 についてみると，たとえば，表-8，1区の定数における LSM の値 0.0502 は，同定数の ERA の値 0.0518，WLSM（i）の値 0.0607，WLSM（ii）の値 0.0529 にくらべて最も小さく，2区の定数における LSM の値 0.0788 は同定数の他の解法による値 0.1050，0.1049，0.0848 に比して最も小さい。このことは他の場合についても同様であり，各区の定数ごとに LSM を用いた場合の $S_e$ の値は，他の解法による値よりも明らかに小さい。このことは理論的にも当然の結果である。

ところで，$S_e'$ についてみると，$S_e$ の場合とはことな

表-10.　$S_e$ の値((1・b)式の場合)

| 解　法 | データ | 1区の定数 | 2区の定数 | 3区の定数 | 4区の定数 | 全体区の定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LSM | 1 区 | **1,164** ( 1 ) | 2,364 (2.03) | 6,334 (5.44) | 30,913 (26.56) | 3,434 (2.95) |
| | 2 区 | 3,824 ( 2.33) | **1,642** ( 1 ) | 4,133 (2.52) | 22,075 (13.44) | 2,207 (1.34) |
| | 3 区 | 2,228 ( 1.83) | 1,490 (1.22) | **1,218** ( 1 ) | 11,873 ( 9.75) | 1,628 (1.34) |
| | 4 区 | 18,050 (13.79) | 9,247 (7.06) | 3,703 (2.83) | **1,309** ( 1 ) | 5,824 (4.45) |
| | 全体区 | 25,266 ( 1.93) | 14,743 (1.13) | 15,388 (1.18) | 66,170 ( 5.05) | **13,093** ( 1 ) |
| ERA | 1 区 | **3,022** ( 1.35) | 2,965 (1.33) | 2,754 (1.23) | 34,601 (15.49) | 2,234 ( 1 ) |
| | 2 区 | 1,851 ( 1.11) | **1,705** (1.02) | 1,678 (1.00) | 25,347 (15.17) | 1,671 ( 1 ) |
| | 3 区 | 1,493 ( 1.10) | 1,363 ( 1 ) | **1,395** (1.02) | 13,587 ( 9.97) | 1,472 (1.08) |
| | 4 区 | 7,017 ( 5.15) | 9,022 (6.62) | 8,503 (6.24) | **1,363** ( 1 ) | 10,191 (7.48) |
| | 全体区 | 13,383 ( 1 ) | 15,055 (1.12) | 14,330 (1.07) | 74,898 ( 5.60) | **15,568** (1.16) |
| WLSM(i) | 1 区 | **1,950** ( 1.19) | 2,127 (1.30) | 5,474 (3.33) | 33,668 (20.50) | 1,642 ( 1 ) |
| | 2 区 | 9,719 ( 4.91) | **2,607** (1.32) | 3,547 (1.79) | 20,531 (10.37) | 1,980 ( 1 ) |
| | 3 区 | 2,575 ( 2.05) | 1,804 (1.44) | **1,256** ( 1 ) | 18,508 (14.74) | 1,669 (1.33) |
| | 4 区 | 31,967 (14.66) | 16,052 (7.36) | 4,102 (1.88) | **2,180** ( 1 ) | 12,417 (5.70) |
| | 全体区 | 46,211 ( 3.21) | 22,590 (1.57) | 14,379 ( 1 ) | 74,887 ( 5.21) | **17,708** (1.23) |
| WLSM (ii) | 1 区 | **1,323** ( 1 ) | 2,310 (1.75) | 5,491 (4.15) | 30,521 (23.07) | 2,173 (1.64) |
| | 2 区 | 5,920 ( 3.56) | **1,823** (1.09) | 3,457 (2.08) | 21,059 (12.65) | 1,665 ( 1 ) |
| | 3 区 | 2,229 ( 1.81) | 1,482 (1.20) | **1,234** ( 1 ) | 12,477 (10.11) | 1,512 (1.23) |
| | 4 区 | 23,827 (17.66) | 11,803 (8.75) | 4,226 (3.13) | **1,349** ( 1 ) | 10,041 (7.44) |
| | 全体区 | 33,299 ( 2.31) | 17,418 (1.21) | 14,408 ( 1 ) | 65,406 ( 4.54) | **15,391** (1.07) |

った傾向がみられる。たとえば，表-7，1区の定数における LSM の値 0.0470 は同定数の他の解法の値 0.0413, 0.0398, 0.0404 に比してむしろ大きい値を示し，他の場合についてみても同じような結果が示されている。すなわち，$S_e$ においてベストな解法である LSM が，$S_e'$ についてみると他に比してむしろ大きい値をとり，LSM がベストであることは $S_e$ についてであることがわかる。

全体区を含めて五つの区について調べたこの実験においては，$S_e'$ の値は (1・a) 式についてみるとそのうち四つの区において，(1・b) 式については三つの区において，WLSM (i) がもっとも小さい値を示している。この結果は，$S_e$ における LSM の結果ほど判然としたものではないが，WLSM (i) による値が比較的小さいことは注目に値する。なぜならば，実用上は $S_e$ よりもむしろ $S_e'$ の小さい方法がのぞまれるからである。

WLSM (i) に次いでは，WLSM (ii) が小さい値を示しており，(1・a) 式の全体区，(1・b) 式の3区においては，WLSM (i) よりもその値は小さく，平均的にみると，WLSM (i) に比して，大きさのちがいは (1・a) 式については約 3%，(1・b) 式については約 5% にすぎない。

このような結果から，定数をもとめたもとのデータに対するあてはまり方のよしあしについて，$S_e'$ の大きさを尺度として比較するならば，本文でとりあげた4法については，明らかに重みを考慮した WLSM(i) あるいは WLSM(ii) がすぐれていると考えることができるであろう。

もっともこれら各法についての寄与率をみると，それぞれの適用結果にみられるとおり，真数の場合 (1・a) 式についてはそのすべてが 98.5% 以上の値を，また (1・b) 式についてはそのほとんどが 95.5% 以上の値を示している。したがって，一般的にいえば，これらの各式はもとのデータに対してよくあてはまると考えられるから，この実験はそのよさの中でさらに比較を行なっていることになる。

次に方法のよしあしを検討する別な側面として，区ごとにもとめた各定数を，それぞれ他の区のデータにあてはめた結果を比較してみよう。

まず，(1・a)式の場合をみると，1区のデータからもとめた1区の定数を2区のデータにあてはめると，$S_e$ については

LSM＜ERA＜WLSM(ii)＜WLSM(i)

であるが，一方，$S_e'$ については

ERA＜WLSM(ii)＜LSM＜WLSM(i)

であり，3区のデータにあてはめると，$S_e$, $S_e'$ ともに

ERA＜WLSM(i)＜WLSM(ii)＜LSM

となっている。

表-7～10 に示されるこのような結果から，全体的に比較すると，$S_e$ についても，また $S_e'$ についてもとくに解法によるちがいは明らかではないが，ただ，$S_e'$ の値を各区の定数ごとにみた場合には，解法によってその大きさに多少の傾向がみられるようにおもわれる。すなわち，(1・a)式の場合，1区および3区の定数については ERA が，2区の定数については WLSM(i)，4区の定数については LSM，そして全体区については WLSM (ii) がそれぞれよい結果を示しており，同様な傾向は，(1・b)式の場合に，1区，3区，全体区において ERA，4区において WLSM (ii) にみられる。

一般に実験式について，その式がもとのデータによくあてはまるかどうかはもちろん重要な問題であるが，その式をつくるのに用いなかった質的に同類の他のデータあるいは将来のデータに対してのあてはまり方，すなわちいわゆる式の再現性の問題も式のよしあしを考慮する場合，実際にはきわめて重要である。

前記したように，この問題については解法間のちがいはかならずしも明らかではなかったが，今後さらに，たとえばデータのもつ特性との関連において，検討を加える必要があるかもしれない。近年開発されたERAは，方法として種々の長所をもつといわれているが，そのひとつに再現性があげられている。この実験例についてみるかぎりは，(4) に示されるほど明らかな結果はみられなかったが，ERA における逐次近似をそこで行なわれる検定にかかわりなく，さらに進めてゆけば，あるいはよい結果がえられたかもしれない。

ところで，他区のデータにあてはめた場合の $S_e'$ を用いて，便宜的に寄与率を計算してみると，(1・a)式についてはほとんどすべてが 95% 以上の値としてもとめられる。したがって，この場合各式を他区のデータに用いることについては，一般的に不安は少ないといえるかもしれない。

しかし，(1・b) 式について計算すると，(1・a) 式とはことなった傾向がみられる。すなわち，1区，2区，3区，全体区の定数を用いて，それぞれ4区以外のデータにあてはめた場合には，93% 程度以上の値がもとめられるが，4区のデータにあてはめた場合および4区の定数を4区以外のデータにあてはめた場合の値は極端に低くなっている。

このことはまた，表-7～10 における比の値をみてもうかがうことができる。(1・a)式の場合，そのほとんどが 2～3 倍程度以内の値を示しているが，(1・b)式の場合においては，上記の寄与率におけると同様の傾向がみられ，そのような場合の値は他に比していちじるしく大きくなっている。

表-1 に示されるとおり，4区は胸高直径や樹高が他区に比して小さい林分であるから，このような結果は，実際の (1・b) 式の利用については，式の定数をもとめた林分とあてはめようとする林分とのちがいについて十分注意する必要のあることを示唆している。

## 引用文献


(1) デミング，W. E.：推計学によるデータのまとめ方．196 pp，岩波書店，東京，1950

(2) Loetsch, F., Zöhrer, F. & Haller, K. E.: Forest Inventory, Vol. 2, 469 pp, BLV Verlagsgesellschaft, München, 1973

(3) 前沢完次郎：単木の求積法に関する研究．東大演報 56：77～212, 1962

(4) 田口玄一・横山巽子：ビジネスデータの分析．286pp，丸善，東京，1975


(1977年3月3日受理)