林分材積推定の新しい方法III

誌名	日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society
ISSN	0021485X
著者	上野, 洋二郎
巻/号	62巻10号
掲載ページ	p. 394-397
発行年月	1980年10月

394～397　J. Jap. For. Soc.　62(10)'80

短　報

林分材積推定の新しい方法 (III)
ラインサンプリングの場合*

上野洋二郎**

I. はじめに

筆者は先の報告(*4*)で，林分材積推定の新しい方法をポイントサンプリングの立場から提案し，その推定量の母分散とその方法の精度を前報(*5*)によって明らかにしてきた。ところで，そこでのサンプリング方法は抽出枠を点として考えているが，ここでは少し考え方を変えて線分を抽出枠とする林分材積推定法を考えてみた。すでに，増山(*2*)は線分で面積を測る方法を提案しているが，この方法の応用として，筆者の提案した3次元標本空間内において線分で林分材積を推定する方法，すなわち，ラインサンプリングによる林分材積推定法（第1法）を積分幾何学的立場から考えてみた。さらに，第1法における推定理論から線分中で乱数発生を行なうことによって，より容易な林分材積推定法を第2法として，あらたに検討してみた。この研究にあたって貴重なご教示を賜わった東京理科大学　増山元三郎教授，東京大学　平田種男教授，同大学　箕輪光博助手の方々に厚くお礼を申しあげる。とくに，第2法の推定理論については箕輪氏の貴重な示唆なしには成立しえなかったものであり，ここにあらためて心からの深謝の意を捧げる。

II. 第1法における推定理論

まず，前報(*4*)でのべた6項目の仮定を，ここでも設けることにする。

1) 林分内の立木の幹軸は直線で，かつ直立している。
2) 樹幹の横断面は，すべて幹軸を中心とした円とする。
3) 林面は水平とし，その面積Aは北村(*1*)の考えた拡大樹幹の底面をすべて含むような大きさである。
4) この林分内にN本の立木があるものとする。
5) 図-1のように，林分面積にその林分中の最大の樹高 ($h_{\max}$) より高いHなる高さ ($H>h_{\max}$) をもつ3次元標本空間Mを設定する（ただし，Mは3次元標本空間の体積とし，$M=A\cdot H$ である)。
6) この標本空間内に北村(*1*)の考えた拡大樹幹Vを想定する。林分中のおのおのの拡大樹幹領域は，すべて3次元標本空間内に包含されるものとする。

このような仮定のもとで，3次元標本空間内に長さLをもつ線分を，ある一定方向にランダムに設定するものとする。このとき，その線分がある立木jの拡大樹幹V_jと交わるなら，そのV_jの中に入る線分の長さをl_jとすると，l_jの期待値$E(l_j)$はいかなるものになるのであろうか。これを考えるには増山(*2, 3*)が線分で面積を推定する方法で行なった証明を吟味しなければならない。すなわち，増山は SANTALÓ の公式に不偏性の条件をとりいれて，ラインを抽出枠とした場合の面積の推定を以下のように証明した。まず，線分Lの一端をD，他端をEとし，Dの座標を (x, y) とする。つぎに，線分 DE の定方向とのなす角を θ ($0\leqq\theta\leqq2\pi$) とすれば，この線分 DE のうち，面積Sなる閉曲線の中に含まれる部分の長さをlとすると，SANTALÓ の定理より

$$\iiint l\,dx\,dy\,d\theta=2\pi LS \qquad (1)$$

そこで，不偏性の条件，すなわち線分の一端Dが必ず閉曲線を包含するような面積T中にあるという条件のもとでは，(1) 式は次のように変形できるとした。

$$E(l)=\iiint_T l\,dx\,dy\,d\theta/T=2\pi LS/T \qquad (2)$$

さらに，増山は上の条件のもとでは線分 DE の向きの確率化は不要であることを証明し，その結果 (2) 式は

$$E(l)=\iint_T l\,dx\,dy/T=LS/T$$

$$\therefore\ \frac{T}{L}E(l)=S$$

となり，$T\cdot l/L$ は閉曲線の面積Sの不偏推定量であることを見いだした。そこで，この結果を3次元標本空間に拡張してみよう。すなわち，図-1のように線分Lの一端Dの座標を x, y, z とした場合，前述したl_jの期待値$E(l_j)$は

$$E(l_j)=\iiint_M l_j\,dx\,dy\,dz/M$$
$$=(L\cdot V_j)/M=(L\cdot V_j)/(A\cdot H) \qquad (3)$$

* Yojiro UENO: A new method of estimating stand volume (III) Line sampling
** 東京農工大学農学部　Fac. of Agr., Tokyo Univ. of Agr. & Tech., Fuchu, Tokyo 183

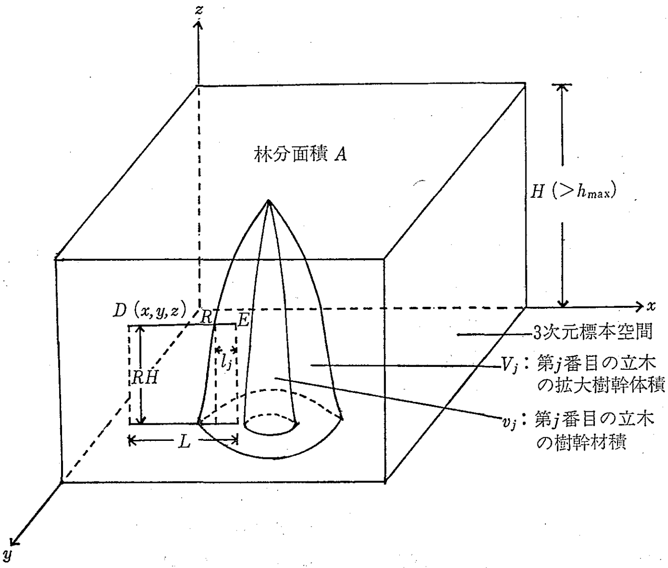

図-1.　長さLの標本線の一部分が拡大樹幹内にくいこんだときの模型図

となる。ところで，林面上にはN本の立木があるから

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\right)=\left(L\cdot\sum_{j=1}^{N} V_j\right)\Big/(A\cdot H) \qquad (4)$$

拡大樹幹の定義により，$V_j=P^2v_j$（ただし，v_j: 立木jの幹材積，P: 樹幹（あるいは樹幹直径）の拡大率）であるから，これを(4)式に代入して整理すると，次式がえられる。

$$\frac{A\cdot H}{L\cdot P^2}E\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\right)=\sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (5)$$

(5) 式からわかるように，$\left(A\cdot H\cdot\sum_{j=1}^{N} l_j\right)\Big/(L\cdot P^2)$ は面積Aなる林地の林分材積の不偏推定量となる。ここで，$A=100^2\,m^2$，断面積定数をkとすれば，(5) 式は

$$\frac{k\cdot H}{L}E\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\right)=\sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (6)$$

となる。(6) 式は明らかに ha 当たりの林分材積を推定する式である。ところで，この方法で林分材積を推定する場合，実際には次の操作が必要となってくるであろう。すなわち，

1) 林面上において，ランダムに標本点を抽出し，それを端点Dとして，ある一定長の線分Lをある一定方向に引き，他端をEとし，これを標本線とする。

2) さらに，図-1 のように，この標本線をHの中からランダムに抽出した値 RH を高さとして3次標本空間内に水平に浮かせる。実際には，測定対象木に対して目盛の入ったそえ木等で RH のところを補助者に明示してもらい，測定者は標本線を歩きながらシュピーゲルレラスコープ等でその部分を視準し，ちょうどスリット幅と樹幹幅が一致した地点が，図-1 のように拡大樹幹と標本線の交点Rであるから，その点と他端Eとの距離を測定して l_j を求めればよいのである。もっとも，この場合は端点を含む標本線の一部分が拡大樹幹 V_j の中にくいこんだかたちになっているが，これとは別に標本線の両端は拡大樹幹の外にあり，その線の一部分が拡大樹幹のなかにある場合は，その標本線上では拡大樹幹と標本線の交点は2個存在するので，この場合は交点間の距離を l_j とすればよい。また，標本線が拡大樹幹の中に完全に入っている場合は，標本線の長さそのものが l_j となる。このときの状態は標本線上のどの位置においても，スリット幅が樹幹幅より常に小さく見える場合である。逆に，スリット幅が常に大きく見える場合は，標本線は拡大樹幹の外側にあるので，l_j は0とすればよいであろう。

以上のやり方で，標本線の周囲木に対して l_j の和を求め，それに断面積定数kとHをかけたものをLで割れば，とりもなおさず ha 当たりの林分材積の推定がかなうのである。ところで，ha 当たり林分材積を正確に推定する場合，(6) 式からわかるように，林分材積を一定としたとき，$k\cdot H/L$ を大にすれば $\sum_{j=1}^{N} l_j$ は小にならざるをえないため，$\sum_{j=1}^{N} l_j$ の標本誤差を少なくするうえでは，前報(4) と同様にHの値はできるだけ $h_{\max}$ に近い値をとることが肝要となってくるであろうし，さらに，線分長Lも大きめにとることが必要となってくるであろう。以上のことは，本法でサンプリングを実施するさいの重

要な柱として考えることができよう。

III. 第2法における推定理論

ところで，第1法は (6) 式からみると，抽出枠としての線分Lが，ある立木jの拡大樹幹 V_j と交わっている場合，その V_j の中に入る線分の長さ l_j の和を求めなければ，林分材積を推定することが不可能である。そのことは，測定実行面でのかなりの煩雑さを生じせしめることとなる。問題は，この煩雑さをいくらかでも少なくする方法は見いだせないものであろうか。そこで，この問題の解決の糸口として次のことを考えてみよう。まず，筆者は前報(4) において面積Aなる林地の林分材積推定式として次式を導いた。

$$\frac{A \cdot H}{P^2} \cdot E\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\right) = \sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (7)$$

ただし，H: 前述した第4項と同じもの，P: 樹幹（あるいは樹幹直径）の拡大率，λ_j: 標本点が，ある立木jの拡大樹幹 V_j の中に入れば 1，さもなければ0をとる離散的確率変数，v_j: 立木jの幹材積，N: 林分内の立木本数。

一方，北村(1) は，ある立木jの一致高 h_j の和 $\sum_{j=1}^{N} h_j$ の期待値 $E\left(\sum_{j=1}^{N} h_j\right)$ を次式として導いた。

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} h_j\right) = P^2 \sum_{j=1}^{N} v_j / A \qquad (8)$$

ただし，P, v_j, Aは前述したものと同じ。(8) 式を (7) 式のように変形すると

$$\frac{A}{P^2} E\left(\sum_{j=1}^{N} h_j\right) = \sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (9)$$

となる。ここで (7)，(9) 両式を比較すると，まさに次の等式がなりたつ。

$$H \cdot E\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{N} h_j\right) \qquad (10)$$

この等式は，筆者の方法と北村の一致高和法を関係づける基本的なものであり，一致高 h_j という連続した確率変数の和の期待値を，λ_j という離散的な確率変数の和の期待値にHをかけることによって求めることができるということを意味する。そして，そのことは，前報(4) でのべたようにHのなかから一様乱数を発生させることによって，はじめて成立させることができる。このことから考えるに，前報(4) の方法は一致高和の期待値を乱数を発生させることによって求めたことにほかならない。そして，結果的には一致高和測定の煩雑さから解放されたものと考えることができる。以上の考え方を利用すれば，第1法における $\sum_{j=1}^{N} l_j$ の期待値 $E\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\right)$ は次のような操作によって求めることができる。すなわち，前述したように，ある線分Lが拡大樹幹 V_j と交わる場合，その V_j の中に入る線分の長さを l_j とし，Lの中から乱数を発生させ，その値が長さ l_j の区間内にあれば1をとり，さもなくば0をとる離散的確率変数 δ_j を考える。そうすると，δ_j の期待値 $E(\delta_j)$ は

$$E(\delta_j) = l_j / L$$

となり，これより

$$L \cdot E(\delta_j) = l_j \qquad (11)$$

(11) 式を (3) 式の左辺に代入すると

$$E(l_j) = E[L \cdot E(\delta_j)] = L \cdot E(\delta_j)$$

となり，林分にはN本の立木があるから，

$$L \cdot E\left(\sum_{j=1}^{N} \delta_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\right) \qquad (12)$$

がなりたつ。(12) 式は，まさに (10) 式と相対応するものであり，δ_jという離散的確率変数の和の期待値にLをかけたものが l_j という連続的確率変数の和の期待値となっているのである。

この (12) 式を (6) 式に代入すると

$$k \cdot H \cdot E\left(\sum_{j=1}^{N} \delta_j\right) = \sum_{j=1}^{N} v_j \qquad (13)$$

となり，$k \cdot H \cdot \sum_{j=1}^{N} \delta_j$ は明らかに ha 当たりの林分材積の不偏推定量となる。そして，(13) 式は前報(4)でのべた ha 当たりの林分材積推定式

$$k \cdot H \cdot E\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\right) = \sum_{j=1}^{N} v_j$$

と相対応することがうかがえよう。実際，この方法で林分材積を推定する場合，手順としては第1法と同様であるが，ただ基本的にことなるのは，線分Lのなかからランダムに抽出された値が長さ l_j の区間内に入っているか，あるいは入っていないかを，あらかじめ明白に判断できれば l_j を測定する必要はない。ただちに，1または0の値を δ_j に与えればよい。問題なのは，ランダムな値が l_j の区間内に入っているか否かがはっきりしていない場合にのみ l_j を測定して，カウントされるのか否かを決定すればよいのである。

以上のやり方で，標本線の周囲木に対してカウントされた立木の本数の和を求め，それに断面積定数kとHをかければ，とりもなおさず ha 当たりの林分材積の推定がかなうのである。この方法は，前述した第1法にくらべて l_j の測定という煩雑さから解放されることにより，測定実行面での迅速さが期待されよう。

ところで，この方法で ha 当たり林分材積を正確に推定したい場合は，第1法でのべたことと同じことがいえるものと考えられる。

IV. おわりに

本報で提案した二つの方法は前報(4) の方法と同じように3次元標本空間における幾何学的確率を基礎としているが，抽出枠を点から線分に変えたところに特色があるといえよう。

ただし，後者の方法は乱数発生によって l_j の和を求めているので，実質的には，前報(4) の方法と同じようにポイントサンプリングそのものであることがわかる。ところで，これら2方法は前報(4) における方法とくらべて測定実行面でのかなりの煩雑さは避けられないものと考えられるが，これらの方法でも ha 当たりの林分材積が理論的に推定できるという考えを，ここでは提示しておくことにした。なお，今回は両方法とも推定量の母平均しか出していないが，母分散および精度については後の機会で検討したい。

引用文献

(1) 北村昌美：一致高和による林分材積の推定に関する理論的研究．山形大紀要 4：365～403，1964

(2) 増山元三郎：幾何学的調査法の話．オペレーションズ・リサーチ 1：41～49，1956

(3) ────：類偶然性について．オペレーションズ・リサーチ 1：272～276，1957

(4) 上野洋二郎：林分材積推定の新しい方法（I）．日林誌 61：346～348，1979

(5) ────：林分材積推定の新しい方法（II）林分材積推定量の母分散と本法の精度．日林誌 62：315～320，1980

(1979 年 11 月 12 日受理)