

## 直交多項式による樹幹形の近似 (2)

誌名	日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society
ISSN	0021485X
著者	長嶋, 郁
巻/号	64巻8号
掲載ページ	p. 307-314
発行年月	1982年8月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター  
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council  
Secretariat



## 論 文

## 直交多項式による樹幹形の近似 (II)

## 半径を連続関数とした場合

長 嶋 郁\*

長嶋 郁: 直交多項式による樹幹形の近似 (II) 半径を連続関数とした場合 日林誌 64: 307~314, 1982 前報 (I) では, 樹幹形を離散的関数と仮定し, 選点正規直交多項式系展開を用いた樹幹形近似について述べたが, この報告では樹幹形を連続な関数と仮定して正規直交関数系展開式によって近似する方法を検討した。ただし, ここでいう連続な樹幹形とは, 樹幹縦断面図において, 半径測定高に対応する半径の点を根元から梢端まで順次直線で連結した図形である。まず連続な正規直交関数系による樹幹形近似の理論を要約し, ついで LEGENDRE の多項式を樹幹形に適合するように若干の変形を行った。正規直交関数系による近似の長所として展開式中の係数が互いに独立に決定できること, またその係数の二乗和によって近似の程度を知りうることは樹幹形を離散的関数とした近似の場合と同様である。この利点に加えて, 連続な直交関数系を適用した場合には, 半径は幹軸上に連続で定義されているから, 幹軸上の半径が測定された位置以外にも無理な補間を行うことなく任意の高さの半径を連続的に表現することができる。

NAGASHIMA, Iku: Stem form approximation by orthogonal polynomials (II) The case supposing radii as a continuous function J. Jap. For. Soc. 64: 307~314, 1982 In the previous paper (I), the stem curve approximation was concerned with an expansion of a discrete orthonormal system. Comparable in this report, is an approximation method with the application of a continuous orthonormal system which is discussed. The continuous stem curve is defined by a scheme which connects segments between the points of co-ordinates, a pair of the radius and its height, from the base to the top of a tree in a longitudinal section. The approximation theory of the continuous stem curve is summarized. Then LEGENDRE's polynomial was modified slightly so as to be more convenient for the nature of the stem form. On the orthonormal expansion, it is convenient that all coefficients mutually are evaluated independently, and the square sum of the coefficients shows the accuracy of the curve fitting, similarly to the case of the discrete function. Adding to these merits, in this case, the radii can be represented at any height with no irrational interpolation because the radius is defined continuously on the real axis of the stem.

## I. はじめに

前報 (3) では, 樹幹形を選点直交多項式系展開によって近似することを論じた。そこでは, 正規直交多項式系を用いる利点として, 1) 多項式の係数決定にあたって通常のいわゆる正規方程式を解く一般の最小二乗法を用いる必要がないこと, 2) 近似式としての正規直交展開式の係数が互いに独立に決定できること, 3) その係数の二乗和によって近似の程度を知ることができることをのべた。しかし, こうして決定された近似式を用いて幹軸上で任意の位置の半径を知ろうとすると, 幹軸上

で選点直交多項式が定義されていない点以外の位置で半径としての推定値を求めることになり, したがって, その値は近似値としての資格はないから注意を要する。とくに外挿の場合, すなわち定義域の外側においては補間多項式によっても推定値は急激に悪化することを覚悟しなくてはならない (長嶋ら, 1981)。

以上の観点に立って本論文では樹幹形を連続な正規直交関数系による近似について検討する。ただし, ここでいう連続な樹幹形は, 幹軸を  $x$  軸として地上高  $z$  で測定された半径を  $y$  座標にとり, それらをグラフ上に点 (測定高, 半径) としてプロットし, これらの点を根元から

\* 名古屋大学農学部 Fac. of Agr., Nagoya Univ., Nagoya 464

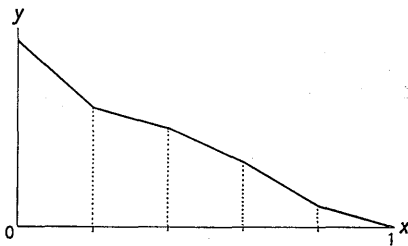


図-1. 連続な樹幹形  
Continuous stem form

梢端まで順次に直線で連結して描かれる図形によって定義される(図-1)。したがって直線的に連続な樹幹形といつてよい。

樹幹形の近似に正規直交系を適用する意義は離散的関に系による場合と基本的には同じである。一般の最小二乗法を採用した場合には、幹軸上で半径の測定をふやすにしがって正規方程式の一次式の独立性が弱くなり解を求めることが困難となる(篠原, 1978)から、直交関数系による場合には1)の利点が著しい。これに加えて連続な直交関数系による場合には、直交関数系の定義域からみて、幹軸上の半径が実測されていない位置においても、半径の近似値は連続な樹幹形に対しいくらでも近似できることが異なる点である。したがって、連続な正規直交関数系を用いれば、直線的に連続な樹幹形に対し幹軸上任意の高さの半径を近似的に表わすことができるから、細りを検討する場合に都合がよいであろう。

II. 連続な樹幹形の近似

1. 樹幹形近似の理論

半径  $y$  の測定高を  $x$  軸上にとる。この場合、樹高  $h$  の方向は梢端が1となるように変換しておく。これにより直線的に連続(以下単に連続ともいう)な樹幹形は、 $x$  の区間  $(0, 1)$  で定義された連続関数  $y(x)$  として表わすことができる(図-1)。樹幹形近似の目標は、適当な正規直交関数系を用いて、上で定義された連続な樹幹形にいかにか近づけるかの問題となる。以下に、正規直交関数系  $\{\Psi_r(x)\}$  による樹幹形近似の理論をのべる。

まず、二つの関数  $y(x)$  と  $z(x)$  の内積を

$$(y, z) = (z, y) = \int_0^1 y(x)z(x)dx \quad (1)$$

により定義する。また、そのノルムを

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \left\{ \int_0^1 y^2(x)dx \right\}^{1/2} \quad (2)$$

によって定義する。

また、正規直交関数系  $\{\Psi_r(x)\}$  には次の正規直交性が成りたっているとする。すなわち、

$$(\Psi_r, \Psi_s) = \int_0^1 \Psi_r(x)\Psi_s(x)dx = \delta_{rs} \quad (3)$$

$$\text{ただし, } \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & (r=s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases}$$

以上のもつて、次の最小二乗近似の定理が成りたっている(一松, 1963)。

最小二乗近似の定理:

$\{\Psi_i(x)\}$  を正規直交関数系とするとき

$$\|y - \sum_{i=1}^n C_i \Psi_i\| = \left\{ \int_0^1 (y(x) - \sum_{i=1}^n C_i \Psi_i(x))^2 dx \right\}^{1/2} \quad (4)$$

を最小にするのは、 $C_i = (y, \Psi_i)$  のとき、かつそのときに限る(証明は略)。

この定理の示す内容は、与えられた関数  $y(x)$  を正規直交関数  $\Psi_i(x)$  の  $n$  次の展開式によって最小二乗の意味で近似するためには  $C_i$  を近似されるべき関数  $y$  に  $\Psi_i(x)$  を内積することによって決定すればよいことを示している。この事情は離散の場合と同様である。 $\Psi_i(x)$  が  $x$  についての  $i$  次の多項式

$$\Psi_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i \quad (5)$$

である場合には、係数  $C_i$  はモーメント系  $\{\mu_r\}$

$$\mu_r(x) = \int_0^1 x^r y(x) dx \quad (r=0, 1, \dots, i) \quad (6)$$

の線形結合である。すなわち、係数  $C_i$  を決定するには、(5)と(6)式をもちいて次式で求めればよい。

$$C_i = (y, \Psi_i) = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_i \mu_i \quad (7)$$

ここで、近似の対象となっている半径  $y$  に対する近似式としての正規直交展開式を  $f_n(x)$  で表記し、次のとおりまとめておく。この場合、添字  $n$  はその近似式(近似値)が第  $n$  次までの正規直交関数を用いた近似であることを示す。

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i \Psi_i(x) \quad (8)$$

$$\text{ただし, } C_i = \sum_{r=0}^i a_r \mu_r$$

樹幹形  $y(x)$  の近似値  $f(x)$  は(8)式で与えられたが、その係数決定のためのモーメントの計算方法は、和の代わりに積分がはいるので離散的関数の場合と若干異なる。半径の測定が  $x$  軸で必ずしも等間隔に行われている必要はないが、ここでは樹高の10等分の各位置で測定されているとする。したがって、樹高が1に変換されていることにより、直径測定位置は、根元と梢端を含めて、

$$x=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$$

である。樹幹形は区分的に直線で連結されるのであるから、各区分に根元から順番をつけその区分に属する  $y$  の添字とすれば、直線的に連続な樹幹形は次式によって定

義できる。すなわち、

$$y(x) = y_1(x) + \dots + y_j(x) + \dots + y_{10}(x) \quad (9)$$

ただし、 $y_j(x) = a_j x + b_j$

$$\left( \frac{j-1}{10} \leq x \leq \frac{j}{10} \right) \quad (j=1, \dots, 10)$$

連続な樹幹についてのモーメント (6) 式は (9) 式を用いて、

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{j=1}^{10} \int_{(j-1)/10}^{j/10} x^r (a_j x + b_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{a_j}{r+2} \left[ x^{r+2} \right]_{(j-1)/10}^{j/10} + \frac{b_j}{r+1} \left[ x^{r+1} \right]_{(j-1)/10}^{j/10} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

として求める。

したがって樹幹形近似式  $f(x)$  の係数  $C_i$ 、すなわち (7) 式は (10) 式を用いて、次のように決定される。

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{r=0}^i a_r \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{a_j}{r+2} \left[ x^{r+2} \right]_{(j-1)/10}^{j/10} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_j}{r+1} \left[ x^{r+1} \right]_{(j-1)/10}^{j/10} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

(8) 式に対応する連続な樹幹形  $y$  の近似式  $f_n(x)$  は、(11) 式で計算された係数をもった正規直交系展開によってつぎのとおりまとめられる。

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n C_i \Psi_i(x) \quad (12)$$

ただし、 $C_i$  は (11) 式である。

(12) 式は  $\Psi_i(x)$  の  $n$  項までの展開式であるが、近似理論によれば、完備な正規直交関数系  $\{\Psi_n(x)\}$  が与えられているならば、 $y$  は平均収束の意味で次の級数に展開できる (RIESZ, 1973)。すなわち、

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \Psi_i(x) \quad (13)$$

ただし、 $C_i = (y, \Psi_i)$

このことは、(12) 式において  $\Psi_i(x)$  が完備であるならば、 $n$  を無限大までとって近似を行えば、直線的に連続な樹幹形  $y(x)$  を完全に表現できることを示している。

次に半径の近似誤差を評価する。半径の近似誤差を  $\varepsilon$  で表わせば、(12) と (13) 式の差をとって

$$\varepsilon = f(x) - y(x) = - \sum_{i=n+1}^{\infty} C_i \Psi_i(x) \quad (14)$$

として評価される。

近似がどの程度まで行われているかどうかを知るためには、近似誤差平方和を半径の二乗の積分値に比較してみればよい。まず半径の二乗の積分は (13) 式のノルム二乗をとって

$$\|y(x)\|^2 = \int_0^1 y^2(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2 \quad (15)$$

である。また誤差平方和は (14) 式のノルム二乗をとって、

$$\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} C_i^2 \quad (16)$$

である。右辺は  $\int_0^1 y^2(x) dx - \int_0^1 f_n^2(x) dx$  と同値である。これにより誤差平方和の比率はパーセントで表わせば、

$$\frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} C_i^2}{\sum_{i=0}^{\infty} C_i^2} \times 100 = \frac{\int_0^1 y^2(x) dx - \int_0^1 f_n^2(x) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx} \times 100 \quad (17)$$

として計算される。(17) 式を計算してあらかじめ設定した誤差平方和の比率より大きな値となったならば近似展開式に、より高い次数の正規直交関数をつけ加えて近似を改善していけばよい。

## 2. 樹幹形近似の正規直交関数系

前節で論じた正規直交関数系は梢端に対応する  $x=1$  で値がゼロとなることは必ずしも保証されていないので、樹幹形近似のためにはそのままの形では適当でない。そこで  $x=1$  において値がゼロとなるような樹幹形近似の意味で完備な正規直交関数系を得たい。そのために完備な直交関数系のうち LEGENDRE の正規直交多項式を選び、樹幹形近似に適するよう変換を行った。本来の LEGENDRE の多項式  $P_n(x)$  は区間  $(-1, 1)$  で定義された微分方程式

$$P_n''(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{RODRIGUES の公式})$$

であるが、これをわれわれの樹幹形に合わせるため定義域を  $(0, 1)$  に変換した多項式  $P_n^*(x)$  から出発したほうがよい (森口ら, 1977)。すなわち、

$$\begin{aligned} P_n^*(x) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n (1-x)^n \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n+r}{r} x^r \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式の直交性は次式によって示されている。

$$(P_m^*, P_n^*) = \begin{cases} 1/(2m+1) & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (19)$$

$P_n^*(x)$  の  $n=2$  までのものを以下と図-2 に示す。

$$\begin{aligned} P_0^*(x) &= 1 \\ P_1^*(x) &= 1 - 2x \\ P_2^*(x) &= 1 - 6x + 6x^2 \end{aligned}$$

さらに、 $P_n^*(x)$  を樹幹形に適合させるために  $x=1/2$  を軸に左右裏返して  $P_0^*=1$  から引く。 $P_n^*(x)$  は

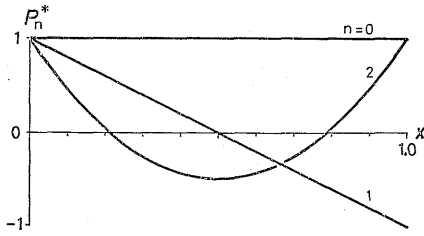


図-2. 直交多項式  
The orthogonal polynomials

$n$  が偶ならば軸  $x=1/2$  について、また奇ならば点  $(1/2, 0)$  について対称であるから裏返しによって

$$P_n^*(1-x) = (-1)^n P_n^*(x)$$

が成り立つ。ここで、以下  $P_n^*(1-x)$  を改めて  $P_n(x)$  の記号で表記することとする。すなわち (18) 式を左右裏返した直交関数は次式で与えられる。

$$P_n(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{m}{r} \binom{m+r}{r} x^r \quad (20)$$

この直交性は (19) 式と変わらない。すなわち、

$$(P_m, P_n) = \begin{cases} 1/(2n+1) & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (21)$$

つぎに梢端で半径がゼロとなるように  $P_n(x)$  を  $P_0(x)=1$  から引いた仮の関数  $U_n(x)$  をつくる。

$$U_n(x) = P_0(x) - P_n(x) \quad (22)$$

この  $U_n(x)$  を GRAM-SCHMIDT の正規直交化の方法をつかって正規直交多項式系  $\{\Psi_n(x)\}$  をつくりあげていく (篠原, 1978)。以下記号について混乱のないかぎり

$$P_n(x) = P_n, \quad \Psi_n(x) = \Psi_n, \quad U_n(x) = U_n$$

などと略記する。また (21) 式の  $m=n$  における右辺を  $k_n$ , すなわち

$$\frac{1}{2n+1} = k_n$$

とおく。これにより  $P_n$  のノルム二乗は以下のとおり表わせる。

$$\begin{aligned} (P_0, P_0) &= 1 = k_0 \\ (P_1, P_1) &= \frac{1}{3} = k_1 \\ (P_2, P_2) &= \frac{1}{5} = k_2 \\ &\vdots \\ (P_n, P_n) &= \frac{1}{2n+1} = k_n \end{aligned}$$

直交化によって得られる新しい正規直交関数系は次のとおりである。すなわち、

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{k_0+k_1}} (P_0 - P_1) \\ \Psi_2 &= \sqrt{\frac{k_0+k_1}{k_0k_1+k_0k_2+k_1k_2}} \left[ \frac{k_1}{k_0+k_1} P_0 + \frac{k_0}{k_0+k_1} P_1 - P_2 \right] \\ &\vdots \\ \Psi_n &= A_{n0} + A_{n1}P_1 + \dots + A_{n,n-1}P_{n-1} + A_{nn}P_n \quad (23) \end{aligned}$$

ただし、

$$A_{nl} = \sqrt{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}} \frac{1}{\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} k_j \quad (n \geq 1, l=0, 1, \dots, n-1)$$

$$A_{nn} = -\sqrt{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}}$$

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^n \prod_{j=0}^i k_j$$

なお、 $\prod_{j=0}^0 k_j = 1$  と定義する。

(23) 式で  $P_n$  は  $x$  の多項式であるから、これを  $x$  のべきについて整理して、次のとおり多項式表示の一般式を得る。

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \sqrt{2n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right) \left[ \sum_{p=0}^{n-1} x^p \left\{ (-1)^p \frac{(2n-1)!!}{n^2} \right. \right. \\ &\quad \times \sum_{q=p}^{n-1} \prod_{j=q}^{n-1} \frac{1}{2j+1} (-1)^q \binom{q}{p} \binom{q+p}{p} \\ &\quad \left. \left. - (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \binom{n+p}{p} \right\} - x^n \binom{2n}{n} \right] \quad (n \geq 1) \quad (24) \end{aligned}$$

(正規直交性)

$$(\Psi_m, \Psi_n) = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (25)$$

(24) 式がわれわれの目的とした樹幹形近似の意味で完備な正規直交多項式系  $\{\Psi_n\}$  である。ただし、この直交性 (25) 式は離散点に対しては保証されていないから、 $\Psi_n$  は離散分布には適用できない。4次までの  $\Psi_n$  を以下と図-3 に示した。

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sqrt{3} (1-x) \\ \Psi_2 &= \sqrt{5} (-1+5x-4x^2) \\ \Psi_3 &= \sqrt{7} (1-11x+25x^2+15x^3) \\ \Psi_4 &= \sqrt{9} (-1+19x-81x^2+119x^3-56x^4) \end{aligned}$$

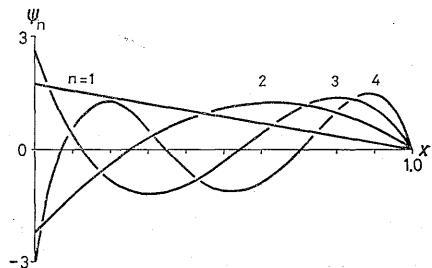


図-3. 樹幹近似正規直交多項式  
Stem form orthonormal polynomials

表-1. モーメントの計算 (例: 演舎 No. 1, 樹高 11.1 m, 20 年生)  
Calculation of moment (sample: Ensha No. 1, tree height 11.1 m, 20 yrs)

区間 $j$	$x_j=j/10$	$y_j$ (cm)	$a_j$	$b_j$	$10^4 x_j^4 = j^4$	$a_j(j^4 - (j-1)^4)$	$10^2 x_j^3 = j^3$	$10 b_j(j^3 - (j-1)^3)$
1	0.0	10.045	-35.85	10.045	0	-35.85	0	100.45
2	0.1	6.46	-4.60	6.92	1	-69.00	1	484.40
3	0.2	6.00	-7.00	7.42	16	-455.00	8	140.60
4	0.3	5.30	-3.00	6.20	81	-525.00	27	2,294.00
5	0.4	5.00	-5.70	7.28	256	-2,103.30	64	4,440.80
6	0.5	4.43	-8.60	8.73	625	-5,770.60	125	7,944.30
7	0.6	3.57	-4.70	6.38	1,296	-5,193.50	216	8,115.30
8	0.7	3.10	-14.20	13.04	2,401	-24,069.00	343	22,037.60
9	0.8	1.68	-10.40	10.00	4,096	-25,636.00	512	21,700.00
10	0.9	0.64	-6.40	6.40	6,561	-22,009.60	729	1,734.40
	1.0	0.00			10,000		1,000	

(1/4)  $\Sigma = -21,466.71$       (1/3)  $\Sigma = 28,622.28$   
 $\mu_2 = 10^{-4}((1/4) \Sigma + (1/3) \Sigma) = 0.715557$

(23) 式について、改めてここに並べたように平方根で示される係数を  $b_n$  で表わし、これを共通因子として割り出し、カッコ内の定数項を 1 または -1 にした次式の形式にしたほうが実用的である。

$$\Psi_n = b_n(a_{n0} + a_{n1}x + \dots + a_{nn}x^n) \quad (26)$$

$(n=1, 2, \dots)$

### III. 近似計算の実例

樹幹形近似の直交多項式系  $\{\Psi_n(x)\}$ 、すなわち (26) 式を各項にもつ正規直交系展開によって樹幹形の近似計算の方法を実際の林木について例示しよう。対象の資料は、半径を離散分布と仮定した前報 (I) に用いたものと同一である。すなわちそれは名古屋大学附属演習林演舎付近 (演舎と略す) に生育している樹齢 20 年生、胸高直径 7 cm、樹高 11 m のスギ 4 本と稲橋地区 (稲橋と略す) に生育している樹齢 60 年生、胸高直径 30 cm、樹高 25 m のスギ 4 本の 2 組である。半径はそれぞれ樹高の 10 等分の各位置で測定されている。

樹幹形近似の方法について計算の順序にしたがって説明する。以下単木についての説明部分には演舎 No. 1 の標本を例として説明する。

#### 1. 樹幹形としての直線式の決定

樹幹形は区分的に直線であるから各区分ごとに直線の勾配  $a_j$  と切片  $b_j$  を計算する。下のほうから第  $j$  番目の区分について (9) 式、すなわち  $y_j(x) = a_j x + b_j$  における二つの係数を決定する。樹高方向は梢端が 1 にな

表-2. 近似展開式係数の計算 (例: 演舎 No. 1)  
Calculation of stem form orthonormal polynomials' coefficients in the expansion (sample: Ensha No. 1)

$r$	$\mu_r$	係 数				
		$\Psi_1$ の	$\Psi_2$ の	$\Psi_3$ の	$\Psi_4$ の	
0	4.120250	$a_{n0}$	1	-1	1	-1
1	1.405042	$a_{n1}$	-1	5	-11	19
2	0.715557	$a_{n2}$	—	-4	25	-81
3	0.430237	$a_{n3}$	—	—	-15	119
4	0.284421	$a_{n4}$	—	—	—	-56
		$b_n$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$
展開式の係数	$C_n$	4.7029	0.0956	0.2650	-0.3418	

るように変換しておけば、次式で計算できる。

$$a_j = 10(y_j(x_j) - y_{j-1}(x_{j-1}))$$

$$b_j = (1-j)y_j(x_j) - jy_{j-1}(x_{j-1})$$

ただし、 $x_j = \frac{j}{10}$

二つの係数の計算結果を表-1 の中に示した。たとえば、第 1 番目の区間 ( $j=1$ ) については  $y_1(0/10) = 10.045$ 、 $y_1(1/10) = 6.46$  をつかって  $a_1 = 35.85$  と  $b_1 = 10.045$  が計算されている。

#### 2. モーメントの計算

(10) 式によってモーメント  $\mu_r$  を計算する。たとえば  $r=2$ 、すなわち 2 次モーメント  $\mu_2$  を計算しようとする場合には、(10) 式から

表-3. 半径の近似値 (例: 演舎 No.1)  
Approximate value of the radii (sample: Ensha No.1)

$x$	$C_1\mathcal{P}_1$	$C_2\mathcal{P}_2$	$f_2$	$C_3\mathcal{P}_3$	$f_3$	$C_4\mathcal{P}_4$	$f_4$	$y$
0.0	8.15	-0.12	7.94	0.72	8.64	1.03	9.67	10.045
0.1	7.33	-0.12	7.21	0.09	7.30	-0.21	7.09	6.46
0.2	6.52	-0.03	6.49	-0.22	6.27	-0.43	5.84	6.00
0.3	5.70	0.03	5.73	-0.32	5.41	-0.17	5.24	5.30
0.4	4.89	0.08	4.97	-0.25	4.72	0.18	4.90	5.00
0.5	4.07	0.11	4.18	-0.09	4.09	0.30	4.47	4.43
0.6	3.26	0.12	3.38	0.11	3.49	0.32	3.81	3.57
0.7	2.44	0.12	2.56	0.28	2.84	0.02	2.86	3.10
0.8	1.63	0.09	1.72	0.36	2.08	-0.51	1.72	1.68
0.9	0.81	0.06	0.87	0.29	1.16	-0.51	0.65	0.64
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

$f_n, y$  の単位: cm

$$\mu_2 = \frac{1}{10^4} \left[ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} a_j \{j^4 - (j-1)^4\} + \frac{10}{3} \sum_{j=1}^{10} b_j \{j^3 - (j-1)^3\} \right]$$

によって計算すればよい。表-1 は  $\mu_2=0.7157$  が計算される過程を説明するためにかかげた。実際には最近の発達した電卓を使用すれば、表-2 に示されるような4次 ( $r=4$ ) までのモーメントなら同時に一括して算出できる。

3. 樹幹形近似展開式の係数  $C_n$  の計算

正規直交系展開式による樹幹形近似式 (8) 式の係数  $C_n$  すなわち (7) 式を計算する。実際の計算は (11) 式による。式中の  $a_r$  は (24) 式の正規直交多項式  $\mathcal{P}_n$  の  $x$  のべきの係数で任意常数ではない。それは (26) 式の形においては  $b_n a_{nr}$  であり、その数値の  $n=4$  までのものは (26) 式に先だっにかかげた  $\mathcal{P}_n$  の四つの式にみられるとおりである。また、半径としての直線式の係数ともちがうので注意されたい。 $C_n$  の求め方を表-2 によって説明する。表のタテ方向に各次のモーメント  $\mu_r$  と  $\mathcal{P}_n$  の係数  $a_{nr}$  との積和をとり、最後に  $b_n$  をかけて  $C_n$  が求まる。たとえば近似式中  $\mathcal{P}_1$  にかかる係数  $C_1$  を求めるには

$$(4.120250 \times 1 + 1.405042 \times (-1)) \times \sqrt{3} = 4.7029$$

と計算される。同様に表-2 によってすべての  $C_n$  がきめられ、したがってこのサンプル (演舎 No.1) についての4次までの樹幹形近似式が

$$f_4(x) = 4.7029 \mathcal{P}_1(x) + 0.0956 \mathcal{P}_2(x) + 0.2650 \mathcal{P}_3(x) - 0.3418 \mathcal{P}_4(x)$$

として求まった。

4. 半径近似値の計算

(8) 式に対応する上述の近似式  $f_n(x)$  をつかって、近似値としての半径を推定してみよう。

上記展開式の各項  $C_n \mathcal{P}_n$  の4次まで、すなわち  $n=4$

までのものをかかげる。

$$C_1 \mathcal{P}_1 = 4.7029 \sqrt{3} (1-x)$$

$$C_2 \mathcal{P}_2 = 0.0956 \sqrt{5} (-1+5x-4x^2)$$

$$C_3 \mathcal{P}_3 = 0.2650 \sqrt{7} (1-11x+25x^2-15x^3)$$

$$C_4 \mathcal{P}_4 = -0.3418 \sqrt{9} (-1+19x-81x^2+119x^3-56x^4)$$

$x$  に実際の値を入れて半径の近似値  $f_4(x)$  を求める (表-3)。1次の近似でよければ  $C_1 \mathcal{P}_1$  だけで、すなわち  $f_1(x) = C_1 \mathcal{P}_1$  により、2次までの近似ならば  $f_2(x) = C_1 \mathcal{P}_1 + C_2 \mathcal{P}_2$  により近似値が計算される。近似が不十分と考えられるならば、より高い次数  $n$  に対応する  $C_n \mathcal{P}_n$  を1項ずつつけ加えていけばよい。近似計算の結果を表-3と図-4(a)に示した。なお稲橋 No.1 についても結果を図-4(b)に示した。図-4に示されたように離散の場合と異なる点は近似値が連続な曲線として与えられることである。もし次数  $n$  を高めて  $C_n \mathcal{P}_n$  の項数をふやしていけば、 $f(x)$  はしだいに直線的に連続な樹幹形に近づくであろう。ただし、近似の様子は平均収束であって  $x$  軸上の個々の点で近似値が一様収束あるいは絶対収束するものではない (RIESZ, 1973)。たとえば、表-3において根元 ( $x=0$ ) の半径実測値は  $y(0)=10.045$  であるのに対し、近似値  $f(0)$  は、第1項  $C_1 \mathcal{P}_1$  のみだと  $f_1(0)=8.15$  と与えられ、第2項までならば  $C_2 \mathcal{P}_2 = -0.21$  を  $f_1(0)$  に加えて  $f_2(0)=7.94$  と一度悪化し、第3項までとると  $C_3 \mathcal{P}_3 = 0.72$  を  $f_2(0)$  に加えて  $f_3(0)=8.64$ 、同様に第4項までで  $f_4(0)=9.67$  となる。このように直交関数系をつかう特徴として  $f(x)$  の各項の  $C_i \mathcal{P}_i$  は互いに直交しているから精度的に不満足ならば表-3のように新しい  $n$  についての  $C_n \mathcal{P}_n$  を計算して、 $f_{n-1}(x)$  につけ加えて  $f_n(x)$  としていける。

5. 近似半径の誤差の評価

正規直交展開によって近似された半径を近似半径とし

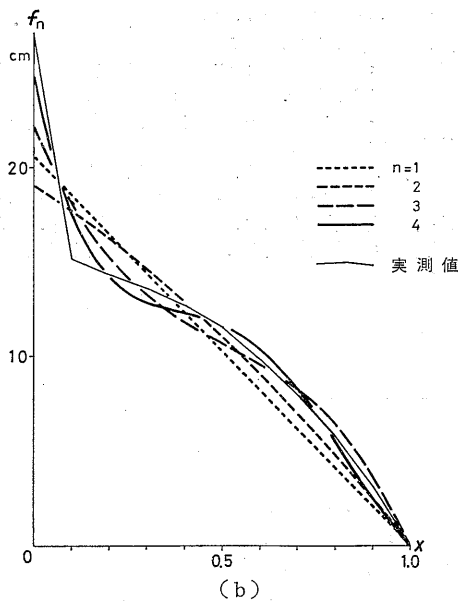
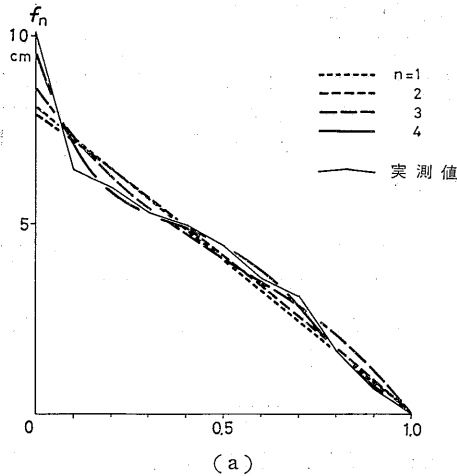


図-4. 近似樹幹形  
Stem form approximated  
(a) 演舎 No.1 Ensha No.1, (b) 稲橋 No.1 Inahashi No.1

て、その誤差を誤差平方和によって評価してみよう(表-4)。誤差平方和は(16)式により連続な樹幹形の二乗、すなわち  $y^2$  の積分から近似式としての正規直交展開式の係数の二乗を引いて与えられる。まず、 $y^2$  の積分は(9)式をつかって

$$\int_0^1 y^2(x) dx = \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{10} \left\{ \frac{a_i^2}{3} (3i^2 - 3i + 1) + 10 a_i b_i (2i - 1) + 10^2 b_i^2 \right\} \quad (27)$$

によって計算する。表-1 の数値をつかって、演舎 No. 1

表-4. 誤差平方和率 (例: 演舎 No. 1)  
The residual sum of squares (sample: Ensha No. 1)

$i$	$C_i$	$C_i^2$	$\sum_{i=1}^n C_i^2$	誤差率 $\left( \int_0^1 y^2 dx - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) / \int_0^1 y^2 dx$
1	4.7029	22.16	22.12	1.00 %
2	0.0956	0.01	22.13	0.96
3	0.2650	0.07	22.20	0.65
4	-0.3418	0.12	22.32	0.12

$$\int_0^1 y^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 = 22.3414$$

表-5. 誤差平方和率による近似結果  
Ratio of the residual sum of squares  
(2 groups, all trees)

グループ 林木No.	演舎 Ensha				稲橋 Inahashi			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1項のみ	1.00	1.33	0.37	1.15	2.13	2.49	1.63	2.57
2項まで	0.96	1.32	0.28	1.13	1.80	1.62	0.79	2.52
3項まで	0.65	1.06	0.22	0.18	0.85	0.57	0.26	1.13
4項まで	0.12	0.40	0.05	0.18	0.34	0.24	0.08	0.49

数値: %

の例を計算すれば  $\int_0^1 y^2(x) dx = 22.3414$  が得られる。ただし、この計算過程の表示は省いた。一方、 $n$  次までの係数の二乗和は表-4 の第 4 列にかかげた。(17) 式に対応する誤差平方和の比率が最後の列に示されている。この表から、誤差平方和率による近似結果をみると、1 次の近似、すなわち第 1 項のみならば 1%、第 2 項の寄与は非常に小さく、4 次までの近似、すなわち第 4 項までとればほぼ 0.1% になっている。

表-5 に 2 グループのすべてのサンプルについて誤差平方和の比率がまとめてある。演舎グループについては、第 1 項のみではほぼ 1% となり、第 4 項までとれば 1% 以下となっている。稲橋グループについては、第 2 項までで 2% 前後の誤差平方和の比率、第 4 項までとれば 1% 以下となっている。この 2 グループについていえば、演舎グループへのあてはまりのほうが少しよい結果になっている。この差異は、立地条件、樹齢の相違によるか、両者が関係しあって生じていると考えられるが、本論文の主旨は樹幹形の近似にあるので、その原因追究は別の機会にしたい。

#### IV. 結 論

連続な樹幹形に対する正規直交関数系展開による近似の問題が検討された。その結果を以下に要約する。ただし、直交性にかかわる部分では前報(3)と共通の事項も含まれている。



1) 本論文において、最初に連続な樹幹形の近似理論が要約され、ついでこの理論のもとに樹幹形を検討するうえで都合がよいう連続な樹幹形近似の正規直交多項式系  $\{\Psi_n(x)\}$  が (25) 式によって構成された。ただし、提案された系の直交性は離散点には保証されていない。

2) 樹幹形近似の多項式は、この樹幹形近似の直交多項式を (12) 式に代入して得られる。この近似式としての正規直交多項式展開の係数は  $\Psi_n(x)$  の直交性により互いに他の係数と独立に決定される。それぞれの係数はその次数までのモーメントの線形結合として計算される。直線的に連続なモーメントの計算は区分ごとに  $x^r y(x)$  を積分したうえで全区分について総和する点が離散の場合と異なる。

3) この近似の方法は最小二乗法であって、係数はいわゆるフーリエ係数である。この係数の決め方は、半径の測定位置をふやすにつれ、一般の最小二乗法では正規方程式を解くことが困難になることと異なる点である。近似式 (12) で与えられる樹幹形は  $n$  が小さいうちは滑らかな曲線であり、 $n$  を限りなく大きくすれば、直線的に連続な樹幹形に近づく。ただし、近似は平均収束であって、一様収束あるいは絶対収束と異なることは離散の場合と変りない。

4) 半径の近似の程度を知るためには、近似式としての正規直交系展開式における係数の二乗和を、連続な樹

幹形 (半径) の二乗を積分した値と比較すればよい。すなわち、誤差平方和の比率 (17) 式を計算して前もって設定した目的精度に収まっているかどうかしらべ、目的の誤差平方和の比率がクリアされていなければ、近似式の次数を高めて  $\Psi_{n+1}(x)$  をつけ加えて近似を改善していけばよい。

この研究をすすめるにあたりご指導賜った鈴木太七教授および梅村武夫助教授に深謝の意を表す。また資料の調整にご協力くださった名古屋大学稲武演習林教職員の方々に心から感謝する。

#### 引用文献

- (1) 一松 信: 解析学序説 (上). 342 pp, 裳華房, 東京, 1963
- (2) 森口繁一・宇田川銑久・一松 信: 数学公式 (III), 310 pp, 岩波書店, 東京, 1977
- (3) 長嶋 郁: 直交多項式による樹幹形の近似 (I) 半径を離散的関数とした場合. 日林誌 63: 435~441, 1981
- (4) ————・山本充男: モーメントによる樹幹形の表現. 日林誌 63: 354~358, 1981
- (5) RIESZ, F. & SZ. NAGY, B.: Leçons d'Analyse Fonctionnelle (秋月康夫・絹川正吉・清原岑夫 (訳): リース・ナジー関数解析学 (上)). 282 pp, 共立出版, 東京, 1973
- (6) 篠原能材: 数値解析の基礎. 385 pp, 日新出版, 東京, 1978

(1981年11月4日受理)

## 学会記事

### ○昭和57年度「朝日賞」候補推薦のお知らせ

朝日賞は、昭和49年度まで文化、社会奉仕、体育の3部門に分かれていましたが、50年度からこれを一本化して学術、芸術、科学技術、社会福祉、体育、その他あらゆる分野を選考の対象とし、各分野で傑出した業績をあげ、わが国の文化・社会の発展と向上に多大の貢献をした個人または団体に贈ることになりました。

ご推薦いただいた候補者につきましては、広く各界の意見を聞いたうえで、本社内に設ける「朝日賞委員会」で選考し、受賞者を決定いたします。

今年度は原則として、昭和57年1月1日から同12月31日までに完成または完成予定の業績を対象としますが、長年にわたる業績にも贈ることができます。また賞は、正賞を賞牌とし、別に副賞 (賞金: 1件につき100

万円) を贈ります。

推薦締切日: 昭和57年9月30日

推薦票提出先・連絡先: 朝日新聞社企画部

「朝日賞」係

### ○第351回編集委員会の記録

と き: 昭和57年7月5日 (月) 15:00~16:30

ところ: 日本林業技術協会会館別館3階会議室

出席者: 立花委員長, 岡, 栗屋, 片岡, 横山, 小谷, 小林 (洋) の各委員, 石垣, 川辺の両主事, 清水 (事務局)

- 議 事: 1) 論文などの審査状況  
2) 論文などの審査者の決定  
3) 64巻7号, 8号, 9号掲載論文の承認および決定  
4) その他