

## 1自由度履歴系の振動性状

誌名	岐阜大学農学部研究報告 = Research bulletin of the Faculty College of Agriculture Gifu University
ISSN	00724513
著者	清水, 英良
巻/号	46号
掲載ページ	p. 275-283
発行年月	1982年12月

# 1 自由度履歴系の振動性状

清水 英 良

## Vibration Model of Single-Degree of Freedom in Hysteretical System

Hideyoshi SHIMIZU

### SUMMARY

The author conducted research on the mechanics of vibration in soil material type as a single-degree of freedom system. First, the resonance curves were obtained for relative displacement and amplification factor for absolute acceleration in case of sinusoidal excitation. Second, in order to gain outputs in case of random excitation, the author determined equivalent linearization parameters. Mean squared displacement and mean squared acceleration were also obtained by means of Fourier transformation. The results are as follows ;

1. Resonance curves and amplification factor : the more the input ratio is, the more their peaks are transferred into low frequency side (i. e., the so-called 'soft-spring type').
2. Within the engineering range, the equivalent frequency is of monotonous degraded type and the equivalent damping ratio is a monotonous incremental one.

Res. Bull. Fac. Agr. Gifu Univ. (46) : 275-283, 1982.

### 要 約

本論文は土質材料における振動解析を1自由度系として取り扱ったものである。最初に筆者は調和波入力の場合の変位共振曲線と加速度応答倍率曲線を求めた。次にランダム波入力の解を得るため等価線形パラメータ  $\omega_{eq}$ ,  $\beta_{eq}$  を算定した。さらにフーリエ変換を用いて変位2乗平均値  $\sigma_x^2$ , 加速度2乗平均値  $\sigma_a^2$  を求めた。結果として次のことが言える。

1. 変位共振曲線, 加速度応答倍率曲線とも入力比が増大するに従ってピークが低振動数側にずれる, いわゆるソフトスプリング型である。
2. 等価線形パラメータ  $\omega_{eq}$ ,  $\beta_{eq}$  は工学的範囲(現実の構造物において生じる範囲)においては前者が単調減少, 後者が単調増加型である。

### 結 言

土構造物の振動解析を行う際, 材料変形特性として最近よく用いられているのは Kondner が提案し Hardin らが発展させた双曲線型の応力~ひずみ曲線式である。Seed, Hardin らは多数の実験結果より非線形運動方程式を等価線形運動方程式に変換する際, 必要な等価減衰率  $\beta$ , 等価剛性率  $G$  をせん断ひずみ  $\gamma$  の関数と考え実験式を提案している<sup>1)</sup>。

一方 Finn<sup>2)</sup>, 大崎ら<sup>3)</sup>は入力の載荷・除荷に伴って生じる履歴特性に注目し, ヒステリシスループの外曲線に Masing 曲線を用いることによって, いわゆる材料非線形履歴モデルの応答解析を行っている。

本論文は土質材料の応力~ひずみ曲線の骨格曲線に双曲線型を用い外曲線に Masing 曲線を使用し, さ

らに Caughey<sup>4,5)</sup>がバイリニアモデルで用いた slowly varying parameter method を適用することによって1自由度系履歴モデルの応答特性を理論的に求めたものである。

なお、実際の土構造物は多自由度系として扱うべきものであろうが、本論文で1自由度系として扱っている理由は、複雑な挙動を振動系がとる場合の因果関係を明確にする目的からであることをここに付記しておく。

方法と結果

土質材料の応力～ひずみ関係は他の材料と異なり、小ひずみレベルにおいても線形関係が成立せずさらに明瞭な降伏点が存在しないということは周知の事実である。Kondner は上記の点に着目し応力～ひずみ曲線の双曲線近似を提案しており、さらに Hardin らはこの関係を土質動力学の分野に適用している。

Hardin らが提案している土質材料の応力～ひずみ関係は次式の通りである (Fig. 1)。

$$\tau = G\gamma, \quad G = \frac{G_0}{1 + |\gamma|/\gamma_r} \tag{1}$$

- ここに、 $\tau$  : せん断応力
- $\gamma$  : せん断ひずみ
- $G$  : せん断弾性係数
- $G_0$  : 初期せん断弾性係数
- $\gamma_r$  : 標準ひずみ

図より明らかに各土質材料の特性は標準ひずみ  $\gamma_r$ 、初期せん断弾性係数  $G_0$  の2つのパラメータによって表現できるものである。

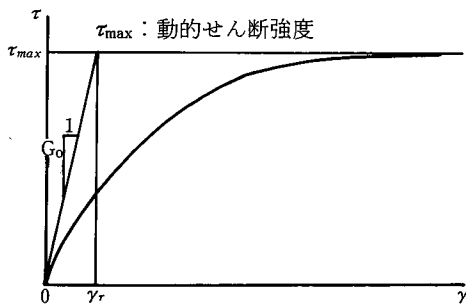


Fig. 1 Stress-strain relationship

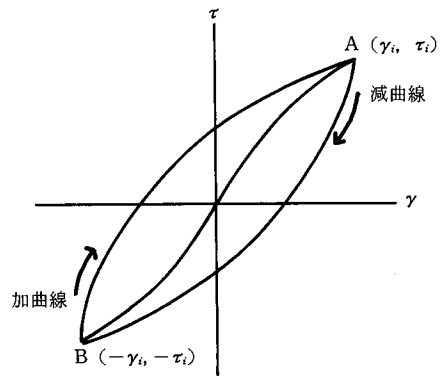


Fig. 2 Stress-strain curves

さらに土質材料の動的非線形・非弾性関係は、たとえばあるひずみレベルにおいて応力が一義的に定められない、すなわち履歴を考慮しなければならない、といった点で顕著に表出していると思われる。Finn らはこういった考えのもとに土質材料の応力～ひずみ曲線はどんな小ひずみレベルのもとでもヒステリシス・ループを描き、その曲線は Masing 式で近似できるものとしている。Fig. 2 に示しているのは、上式 (1) を骨格曲線式として使い、ヒステリシスループ AB (減曲線)、BA (加曲線) に Masing 曲線式を用いた応力～ひずみ曲線である。

$$\widehat{AB} : \tau - \tau_i = \frac{G_0(\gamma - \gamma_i)}{1 + \frac{|\gamma - \gamma_i|}{2\gamma_r}} \tag{2, a}$$

$$\widehat{BA} : \tau - \tau_1 = \frac{G_0(\gamma - \gamma_1)}{1 + \frac{\gamma - \gamma_1}{2\gamma_r}} \quad (2, b)$$

〈調和加振波入力への応答特性〉

○変位応答

式(2, a)を用いて反力  $f(x, x_1)$  を求めると

$$f(x, x_1) = AG_0 \left\{ \frac{2(x - x_1)}{2H + (x_1 - x)/\gamma_r} + \frac{x_1}{H + x_1/\gamma_r} \right\} \quad (3)$$

但し, A : 参考面積

H : 参考高さ

x : 相対変位

$x_1$  : 変位振幅

となる。今質量  $m$ , 反力が  $f(x, x_1)$  の1自由度系履歴モデルに調和加振力が作用すると運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x, x_1) = P \cos \omega t \quad (4)$$

ここで, P : 加振幅

$\omega$  : 入力円振動数

今, 無次元時間  $\tau = \omega_0 t$ , 無次元振動数  $\eta = \omega / \omega_0$  を導入すると上式は次のようになる ( $\omega_0$  : 固有円振動数)。

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{k} f(x, x_1) = P_k \cos \eta \tau \quad (5)$$

但し,  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $k = AG_0/H$ ,  $P_k = P/k$

ここで応答振幅  $x_1$ , 位相角  $\phi$  が時間  $\tau$  の slowly varying function である ( $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ ) とすると, 式(5)の解は

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos(\eta \tau + \phi) \\ &= x_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

となる。上式を  $\tau$  で微分すると

$$\frac{dx}{d\tau} = -\eta x_1 \sin \theta \quad (7, a)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\eta^2 x_1 \cos \theta \quad (7, b)$$

となり, (5)式に代入する:

$$-\eta^2 x_1 \cos \theta = \frac{1}{k} f(x, x_1) = P_k \cos(\theta - \phi) \quad (8)$$

式(8)の両辺に  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  をそれぞれ乗じ,  $\theta$  の1サイクルの平均をとると次の2式が得られる。

$$\frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} f(x_1 \cos \theta, x_1) \sin \theta d\theta = P_k \sin \phi \quad (9, a)$$

$$-\eta^2 x_1 + \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} f(x_1 \cos \theta, x_1) \cos \theta d\theta = P_k \cos \phi \quad (9, b)$$

上式を平方して加え合わせると振動数比  $\eta$  についての方程式となり

$$x_1^2 \eta^4 - 2x_1 B(x_1) \eta^2 + [A(x_1)]^2 + [B(x_1)]^2 - P_k^2 = 0 \quad (10)$$

但し,

$$A(x_1) = \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} f(x_1 \cos \theta, x_1) \sin \theta d\theta$$

$$B(x_1) = \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} f(x_1 \cos \theta, x_1) \cos \theta d\theta$$

となる。これより  $\eta^2$  について解け、

$$\eta^2 = \frac{B(x_1)}{x_1} \pm \left[ \left( \frac{P_k}{x_1} \right)^2 - \left\{ \frac{A(x_1)}{x_1} \right\}^2 \right]^{1/2} \tag{11}$$

となる。ここで変位比  $x_r = x_1/H\gamma_r$ , 入力比  $P_r = P_k/H\gamma_r$  とし、さらに  $A_0(x_r) = A(x_1)/x_1$ ,  $B_0(x_r) = B(x_1)/x_1$  として積分を実行すると(付録参照), (11)式は結局次式となる。

$$\eta^2 = \frac{4}{x_r^2} \left\{ (1+x_r)^{1/2} + (1+x_r)^{-1/2} - 2 \right\} \pm \left[ \left( \frac{P_r}{x_r} \right)^2 + \frac{16}{\pi^2 x_r^4} \left\{ (1+x_r) - (1+x_r)^{-1} - 2 \log(1+x_r) \right\}^2 \right]^{1/2} \tag{12}$$

すなわち, 入力比  $P_r$ , 振動数比  $\eta$  をパラメータとして一意的に変位比  $x_r$  が理論的に求められることを上式は示している。

Fig. 3 に(12)式より得られる変位共振曲線を示す。図より共振曲線は入力比  $P_r$  の増大に伴って変位比  $x_r$  の最大値が振動数比  $\eta$  の低下に対応している, いわゆるソフトスプリング型であることがわかる。また入力の時間ずれを表す位相角  $\phi$  は(9)式より

$$\tan \phi = \frac{A_0(x_r)}{B_0(x_r) - \eta^2} \tag{13}$$

となる。

○加速度応答

(4)式より絶対加速度応答  $y$  は次式で与えられる。

$$y = -\omega^2 x_1 \cos(\eta\tau + \phi) + a \cos \eta\tau \tag{14}$$

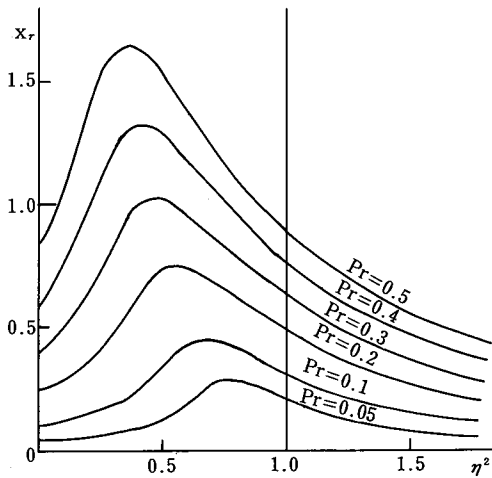


Fig. 3 Resonance curves for relative displacement

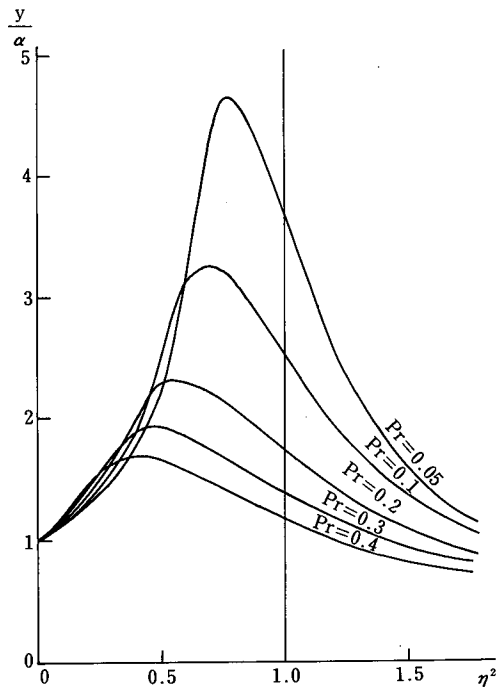


Fig. 4 Amplification factor for absolute acceleration

但し、 $\alpha$ ：入力加速度(=P/m)

これより加速度応答倍率  $y/\alpha$  は  $\alpha = P_r \omega_0^2 H y_r$  に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{y}{\alpha} &= -\frac{\eta^2 x_1}{P_r} (\cos \eta \tau \cos \phi - \sin \eta \tau \sin \phi) + \cos \eta \tau \\ &= \left( -\frac{\eta^2 x_r}{P_r} \sin \phi \right) \sin \eta \tau + \left( 1 - \frac{\eta^2 x_r}{P_r} \cos \phi \right) \cos \eta \tau \\ &= \left( 1 - \frac{2\eta^2 x_r}{P_r} \cos \phi + \frac{\eta^4 x_r^2}{P_r^2} \right)^{1/2} \cos(\eta \tau + \phi') \end{aligned} \quad (15)$$

となる。但し

$$\tan \phi' = \frac{\eta^2 x_r \sin \phi}{\eta^2 x_r \cos \phi - P_r} \quad (16)$$

である。すなわち振動数比  $\eta$ 、入力比  $P_r$  をパラメータとして式(12)・(13)より求められる  $x_r$ 、 $\phi$  に対して(14)・(15)式より加速度応答倍率  $y/\alpha$ 、位相角  $\phi'$  が得られる。Fig. 4 に絶対加速度応答倍率曲線を示す。この図から入力比の増大に伴って応答倍率が低下し、またピークが低振動数比側にずれてくるのがわかる。

〈等価線形パラメータの決定〉

○ $\omega_{eq}$ 、 $\beta_{eq}$  の決定

次に、より一般的な形として系が粘性減衰率  $\beta_0$  をもち入力周期波数特性をもたない定常ガウス過程  $n(t)$  である場合、前節と同様な議論で非線形運動方程式は次のように表される。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \beta \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{k} f(x, x_1) = n_k(\tau) \quad (17)$$

但し、 $\beta = 2\beta_0$ 、 $n_k(\tau) = n(\tau)/k$

上式と同値である次式を考える。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} + \omega_{eq}^2 x + \varepsilon(x, \frac{dx}{d\tau}) = n_k(\tau) \quad (18)$$

上式の  $\varepsilon(x, dx/d\tau)$  を最小にするような  $\beta_{eq}$ 、 $\omega_{eq}$  を求めれば非線形運動方程式は等価線形運動方程式に変換される。式(17)・(18)より

$$E[\varepsilon^2(x, \frac{dx}{d\tau})] = E\left\{ \left( (\beta - \beta_{eq}) \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{k} f(x, x_1) - \omega_{eq}^2 x \right)^2 \right\} \quad (19)$$

但し、 $E[\ ]$ ：期待値記号

上式を  $\beta_{eq}$ 、 $\omega_{eq}^2$  について最小化する：

$$\beta_{eq} = E\left[ \beta \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{k} f(x, x_1) - \omega_{eq}^2 x \frac{dx}{d\tau} \right] / E\left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (20)$$

$$\omega_{eq}^2 = E\left[ (\beta - \beta_{eq}) x \frac{dx}{d\tau} + \frac{x}{k} f(x, x_1) \right] / E[x^2] \quad (21)$$

定常ランダム過程では同時刻で速度と変位は無相関であり

$$E\left[ x \frac{dx}{d\tau} \right] = 0 \quad (22)$$

である。これより

$$\beta_{eq} = \beta + E\left[ -\frac{dx}{d\tau} \frac{1}{k} f(x, x_1) \right] / E\left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$\omega_{eq}^2 = E\left[ \frac{x}{k} f(x, x_1) \right] / E[x_1^2] \quad (24)$$

前節と同様に slowly varying parameter method を用いると、

$$x = x_1 \cos(\omega_{eq} \tau + \phi) \quad (25)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\omega_{eq} x_1 \sin(\omega_{eq}\tau + \phi) \tag{26}$$

となる。  $\omega_{eq}\tau + \phi = \theta$  とおき  $\theta$  の 1 サイクルの平均をとり(25)・(26)式を(23)・(24)式に代入することにより次式が得られる。

$$\beta_{eq} = \beta + E\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\omega_{eq} x_1 \sin\theta}{k} f(x_1 \cos\theta, x_1) d\theta\right] / E\left[\omega_{eq}^2 x_1^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta\right] \tag{27}$$

$$\omega_{eq}^2 = E\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_1 \cos\theta}{k} f(x_1 \cos\theta, x_1) d\theta\right] / E\left[x_1^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta\right] \tag{28}$$

前節と同様に  $A(x_1)$ ,  $B(x_1)$  の記号を用いて、

$$\beta_{eq} = \beta - E[x_1 A(x_1)] / \omega_{eq} E[x_1^2] \tag{29}$$

$$\omega_{eq}^2 = E[x_1 B(x_1)] / E[x_1^2] \tag{30}$$

となる。今エルゴード過程であるとするとき時間平均は確率平均で表せ

$$\beta_{eq} = \beta - \int_0^\infty x_1 A(x_1) P(x_1) dx_1 / \omega_{eq} \int_0^\infty x_1^2 P(x_1) dx_1 \tag{31}$$

$$\omega_{eq}^2 = \int_0^\infty x_1 B(x_1) P(x_1) dx_1 / \int_0^\infty x_1^2 P(x_1) dx_1 \tag{32}$$

となる。但し  $P(x_1)$  は確率密度関数である。一般に入力がガウス過程であるとするとき出力の確率密度関数は Rayleigh 分布をとるとされている。すなわち

$$P(x_1) \approx \frac{x_1}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}\right] \tag{33}$$

但し、  $\sigma_x^2 = E[x^2]$

式(30)を(34)・(35)式に代入し  $A(x_1)$ ,  $B(x_1)$  の積分計算を実行することによって次式が得られる。

$$\beta_{eq} = \beta + \frac{4}{\pi \omega_{eq} \lambda^2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda - \int_0^\infty \left\{ (1 + \lambda \sqrt{t})^{-1} + 2 \log(1 + \lambda \sqrt{t}) \right\} e^{-t} dt \right] \tag{37}$$

$$\omega_{eq}^2 = \int_0^\infty (1 + \lambda \sqrt{t})^{-3/2} e^{-t} dt \tag{38}$$

ここで、  $\lambda = \sqrt{2} \sigma_x / H \gamma_r$

Fig. 5. 6 は等価振動数  $\omega_{eq}$  と等価履歴減衰率  $(\beta_{eq} - \beta)$  をプロットしたものである。図より等価振動数

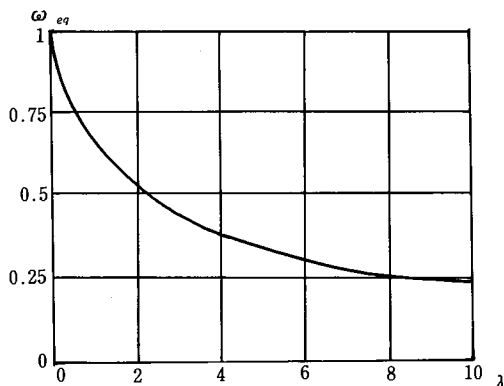


Fig. 5 Equivalent frequency

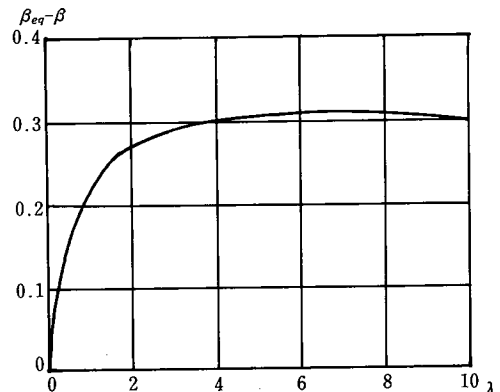


Fig. 6 Equivalent damping ratio

$\omega_{eq}$  は応答大 ( $\lambda$  大) なるにつれて単調減少しているが、等価履歴減衰率 ( $\beta_{eq} - \beta$ ) は  $\lambda \approx 6$  で最大値 0.31 をとる上に凸の曲線であることがわかる。工学的な  $\lambda$  のとる範囲を考慮すると、横軸  $\lambda (= \sqrt{2} \sigma_x / H \gamma_T)$  は最大せん断ひずみ比  $\gamma_{max} / \gamma_T$  とみなしても大差なく、この場合  $\lambda$  の範囲は Fig. 6 の増大してゆく範囲内である<sup>9)</sup>。すなわち土構造物においては履歴減衰率をひずみの単調増加関数と考えてさしつかえなく、Hardin らが実験的に求めた終局減衰比  $D_{max}$  はこの  $\lambda \approx 6$  の値と対応していると思われる。

○  $\sigma_x$ , 相対変位比の決定

正準化された等価線形運動方程式を再掲する：

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} + \omega_{eq}^2 x = -\frac{d^2z}{d\tau^2} \quad (39)$$

ここで、 $z$ ：基盤の変位

上式を Fourier 変換することによって次式が求められる。

$$X(\omega) = \frac{-\dot{Z}(\omega)}{\omega_{eq}^2 - \omega^2 + i\omega\beta_{eq}} \quad (40)$$

但し、 $X(\omega)$ ：相対変位  $x$  の Fourier 変換

$\dot{Z}(\omega)$ ：入力加速度の Fourier 変換

上式より変位パワースペクトル密度関数は次式のようになる。

$$G_x(\omega) = \frac{G_z(\omega)}{(\omega_{eq}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta_{eq})^2} \quad (41)$$

ここに、 $G_x(\omega)$ ：変位パワースペクトル

$G_z(\omega)$ ：入力加速度パワースペクトル

変位 2 乗平均値  $\sigma_x^2$  は  $\sigma_x^2 = \int_0^\infty G_x(\omega) d\omega$  より、今入力スペクトルが強度  $S$  のホワイトノイズであるとすると  $\sigma_x^2$  が求まり

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi S}{2\omega_{eq}^2 \beta_{eq}} \quad (42)$$

となる。同様に線形運動方程式：

$$\frac{d^2x_L}{d\tau^2} + \beta \frac{dx_L}{d\tau} + x_L = -\frac{d^2z}{d\tau^2} \quad (43)$$

但し、 $x_L$ ：線形相対変位

上式からも  $\sigma_{xL}^2$  が求まり、結局

$$f = \frac{\sigma_x}{\sigma_{xL}} = \frac{1}{\omega_{eq}} \left( \frac{\beta}{\beta_{eq}} \right)^{1/2} \quad (44)$$

となる。ここで前節と同様に線形変位応答比： $\lambda_L = \sqrt{2} \sigma_{xL} / H \gamma_T$  とおくと  $f = \lambda / \lambda_L$  となり、ある  $\lambda$  の値を仮定し (37)・(38) 式、あるいは Fig. 5. 6 より  $\omega_{eq}$ ,  $\beta_{eq}$  を求め  $\beta$  をパラメータとして (44) 式より相対変位比  $f$  を求めると結局  $\lambda_L$  が求まり Fig. 7 の  $f \sim \lambda_L$  曲線が得られる。この図より次のことがいえよう。

1. 同一の線形応答のもとでは粘性減衰比が大きい程等価線形変位応答も大きくなる。
2. 線形変位応答  $\lambda_L$  が小さい範囲では変位 r. m. s. 応答比は減少するが、 $\lambda_L$  がある値をこえ増大していくと変位応答比  $f$  も増大していく。

○ 絶対加速度比の決定

(43) 式を絶対変位  $y$  で表わすと次式のようになる。

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dy}{d\tau} + \omega_{eq}^2 y = \beta_{eq} \frac{dz}{d\tau} + \omega_{eq}^2 z \quad (45)$$

前項で求めたのと同様な手順で次の絶対加速度 r. m. s. 値比が得られる。

$$g = \frac{\sigma_x}{\sigma_{xL}} = \left\{ \frac{\beta(1 + \beta_{eq}^2)}{\beta_{eq}(1 + \beta^2)} \right\}^{1/2} \quad (46)$$

Fig. 8 に  $g \sim \lambda_L$  曲線を示す。上式の微分形より明らかに絶対加速度比  $g$  は  $\beta_{eq}$  が増大する範囲で減少して



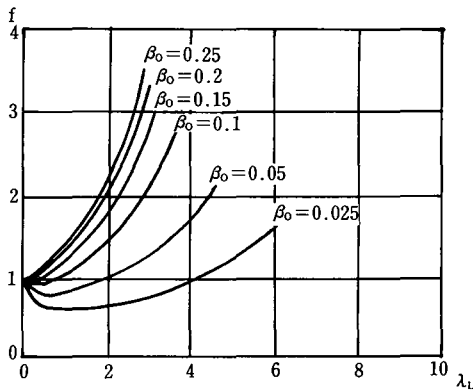


Fig. 7 Relative displacement ratio

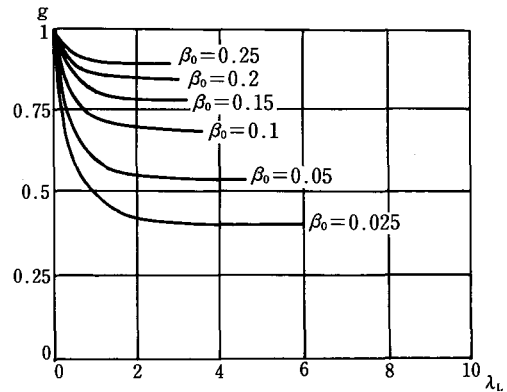


Fig. 8 Absolute acceleration ratio

おり、粘性減衰率  $\beta_0$  が小さい程その低下率は大きいといえる。

### 結 論

以上調べた事により以下の点が結論づけられよう。

1. 変位共振曲線、加速度応答倍率曲線より明らかに、土質材料は入力比が大なるにつれてピーク値が低振動数側にずれる、いわゆるソフトスプリング型であり、加速度応答倍率は入力比の増大に伴い減少してゆく。
2. 等価線形パラメータは系の応答を定常不規則過程ととらえることにより  $\lambda$  をパラメータとして決定できる。等価振動数は単調減少型であり、等価減衰率は  $\lambda = 6$  でピークをとるが工学的範囲では  $\lambda$  の増加と共に増加すると考えてさしつかえない。
3. 実際に等価線形パラメータを算出するには、系の線形解を求めることによって  $\lambda$  を決定してやればよい。

本論文は1自由度系せん断振動モデルについて求めたものであるが、この解法を多自由度系に拡張して適用することも可能であると思われる。しかしながら実際の適用においては等価線形化法自体内在している本質の限界（たとえば残留ひずみ（変位）を表現し得ない）に留意して用いる必要がある。本論文が土構造物・地盤の地震応答解析に少しでも役に立てれば幸いと思う。

### 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、岐阜大学農学部仲野良紀教授、嶋崎藤雄助教授からは非常に懇切なる御指導を受けました。ここに深甚の謝意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) Hardin, et al. : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equations and Curves . J. Soil Mech. Found. Div. (98) : 667-692, 1972.
- 2) Finn, et al. : Dynamic Effective Stress Analysis of Sands. 9th ICSMFE (4/10) : 231-236, 1977.
- 3) 大崎ら : 地盤振動解析のための土の動力学モデルの提案と解析例. 15th Japan Earthquake Eng. Sym. : 697-704, 1978.
- 4) Caughey : Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis. J. Appl. Mech. (27) : 640-644, 1960.
- 5) Caughey : Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis. J. Appl. Mech. (27) : 649-652, 1960.

6) 沢田ら：干拓堤防の地震記録解析と地震応答解析。農業土木学会論文集(82)：65-71, 1979.

〈付録〉

$A_0(x_r)$ ,  $B_0(x_r)$ の求め方

$$i) A_0(x_r) = \frac{A(x_1)}{x_1}, \quad A(x_1) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi f(x, x_1) \sin \theta \, d\theta$$

$$A(x_1) = \frac{2G_0 A x_1}{\pi k} \int_0^\pi \left\{ \frac{2(\cos \theta - 1)}{2H + x_1(1 - \cos \theta)/\gamma_r} + \frac{1}{H + x_1/\gamma_r} \right\} \sin \theta \, d\theta$$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{2(\cos \theta - 1)}{2H + x_1(1 - \cos \theta)/\gamma_r} \sin \theta \, d\theta$$

$$= \int_0^\infty \frac{2 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 \right)}{2H + \frac{x_1}{\gamma_r} \left( 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \frac{2t}{1+t^2} \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

$$= -8 \int_0^\infty \frac{t^3}{(H + x_1/\gamma_r)t^2 + H} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= -\frac{8\alpha}{H} \int_0^\infty \frac{t^3}{(t^2 + \alpha)(1+t^2)^2} \, dt \quad \left( \alpha = \frac{H}{H + x_1/\gamma_r} \right)$$

$$= -\frac{8\alpha}{H} \int_0^\infty \left\{ \frac{-\alpha t}{(1-\alpha)^2(t^2 + \alpha)} + \frac{\alpha t}{(1-\alpha)^2(t^2 + 1)} + \frac{t}{(1-\alpha)(t^2 + 1)^2} \right\} dt$$

$$= \frac{4\alpha}{H(1-\alpha)^2} \left[ \alpha \log(t^2 + \alpha) - \alpha \log(t^2 + 1) + \frac{1-\alpha}{t^2 + 1} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{4\alpha}{H(1-\alpha)^2} (\alpha - 1 - \alpha \log \alpha)$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{1}{H + x_1/\gamma_r} \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\alpha}{H}$$

$$\therefore I_1 + I_2 = \frac{2}{H x_r^2} \left\{ \frac{1}{1+x_r} - (1+x_r) + 2 \log(1+x_r) \right\} \quad \left( \frac{x_1}{H \gamma_r} = x_r \right)$$

$$\therefore A_0(x_r) = \frac{4}{\pi x_r^2} \left\{ \frac{1}{1+x_r} - (1+x_r) + 2 \log(1+x_r) \right\} \quad \left( \because k = \frac{A G_0}{H} \right)$$

$$ii) B_0(x_r) = \frac{B(x_1)}{x_1}, \quad B(x_1) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi f(x, x_1) \cos \theta \, d\theta$$

$$B(x_1) = \frac{2G_0 A x_1}{\pi k} \int_0^\pi \left\{ \frac{2(\cos \theta - 1)}{2H + x_1(1 - \cos \theta)/\gamma_r} + \frac{1}{H + x_1/\gamma_r} \right\} \cos \theta \, d\theta$$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{2(\cos \theta - 1)}{2H + x_1(1 - \cos \theta)/\gamma_r} \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{4\alpha}{H} \int_0^\infty \frac{t^2(t^2 - 1)}{(t^2 + \alpha)(1+t^2)^2} \, dt$$

$$= \frac{4\alpha}{H} \int_0^\infty \left\{ \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2(t^2 + \alpha)} + \frac{1-3\alpha}{(1-\alpha)^2(t^2 + 1)} - \frac{2}{(1-\alpha)(t^2 + 1)^2} \right\} dt$$

$$= \frac{4\alpha}{H(1-\alpha)^2} \left[ \sqrt{\alpha}(1+\alpha) \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{\alpha}} + (1-3\alpha) \tan^{-1} t - (1-\alpha) \left\{ \frac{t}{t^2+1} + \tan^{-1} t \right\} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{2\alpha}{H(1-\alpha)^2} (\alpha \sqrt{\alpha} - 2\alpha + \sqrt{\alpha}) \pi$$

$$= \frac{2\pi}{H x_r^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x_r}} + \sqrt{1+x_r} - 2 \right)$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{H + x_1/\gamma_r} \, d\theta = 0$$

$$\therefore B_0(x_r) = \frac{4}{x_r^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x_r}} + \sqrt{1+x_r} - 2 \right)$$