

Richards functionの分類と林分生長曲線への応用 (2)

減少型関数について

誌名	日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society
ISSN	0021485X
著者名	内藤,健司 白石,則彦
発行元	日本林學會
巻/号	65巻8号
巻号補足	
掲載ページ	p. 294-298
発行年月	1983年8月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター

Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council
Secretariat



短 報

RICHARDS function の分類と林分生長曲線への応用 (II)

減少型関数について*

内藤 健 司**・白石 則 彦***

I. は じ め に

筆者らは、第 I 報 (3) において、RICHARDS function (以後、R 関数と省略) を、そのパラメータの符号の組合せにより、8 個の型に分類し、そのうち 4 個の増加型について検討を行った。その結果、I 型と VI 型が、増加型の林分生長曲線として適用可能であることを指摘した。また、実際の資料に R 関数をあてはめるとき、M 法と N 法をうまく使いわけることにより、パラメータの初期値設定が、多少容易になる可能性についても指摘した。

今回は、残る 4 個の減少型 R 関数について検討を加え、さらに M 法と N 法を用いた場合の違いについても検討する。

II. 減少型関数の曲線の特徴

減少型 R 関数が、(1) 式で表わされるものとする。ここで、 A, B, k, n は定数である。また、 y の 2 次導関数は、(2) 式で表わされる。

$$y = A(1 - Be^{-kt})^n \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ak^2nBe^{-kt}(1 - Be^{-kt})^{n-2}(nBe^{-kt} - 1) \quad (2)$$

以下、次の 3 点、i) 曲線が上限値、下限値をもつか、ii) 曲線が変曲点をもつか、iii) y 切片の値に制限があるか、に注目して、曲線の特徴を分析する。なお、型の分類は、前報 (3) に示してある。

1. II 型の場合 ($n > 0, k > 0, B < 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} A(1 + |B|e^{-kt})^n = A$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} A(1 + |B|e^{-kt})^n = \infty$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ak^2n|B|e^{-kt}(1 + |B|e^{-kt})^{n-2}(n|B|e^{-kt} + 1) \quad (3)$$

(3) 式の右辺各項は正であるから、 $d^2y/dt^2 > 0$ である。このような結果から、II 型の曲線は、 $t \rightarrow \infty$ で下限値 A をもち、 $t \rightarrow -\infty$ で発散し、変曲点をもたない下に

凸の減少曲線といえる。なお、 y 切片は A より大きな値をとりうる。

2. III 型の場合 ($n > 0, k < 0, B > 0$)

(1) 式において、関数の定義により $(1 - Be^{kt}) \geq 0$ であるから、 $t_{\max} = (1/|k|) \ln(1/B)$ とすれば、(4) 式に示すような制約条件がつく。

$$t \leq t_{\max} \quad (4)$$

したがって

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y = \lim_{t \rightarrow t_{\max}} A(1 - Be^{kt})^n = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} A(1 - Be^{kt})^n = A$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ak^2nBe^{kt}(1 - Be^{kt})^{n-2}(nBe^{kt} - 1) \quad (5)$$

(5) 式は、 $nBe^{kt} = 1$ のとき 0 となり、曲線は変曲点をもつ。以後、変曲点の座標を (t_f, y_f) と書くことにすれば、 t_f, y_f は次のように書ける。

$$t_f = \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{nB}, \quad y_f = A(1 - 1/n)^n$$

以上の考察の結果、一般に III 型の曲線は、上限値 A 、下限値 0 をもつシグモイド型曲線となるが、 n, B の値により、 $t \geq 0$ なる領域において、さまざまな形を呈する。

$nB > 1$ のときには、変曲点は $t < 0$ の領域に現われ、 $t \geq 0$ なる領域において、曲線は下に凸の減少曲線となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_f = A/e$ であるから、 $0 < y_f < A/e$ となり、 y 切片は A/e より大きな値はとれない。

$nB \leq 1$ のときには、 $t \geq 0$ なる領域で曲線はシグモイド型曲線を表わす。 y 切片は、0 と A の間の値をとりうる。ただし、 $nB \leq 1$ であっても、 $n < 1$ の場合には、 $t_f > t_{\max}$ となり、関数の定義される領域において、曲線は変曲点をもたない。このとき曲線は、上に凸の減少曲線を表わし、 y 切片の値は 0 と A の間の値をとる。

3. V 型の場合 ($n < 0, k > 0, B > 0$)

この型の場合も、関数の定義により (1) 式の括弧の中は負になれないので、 $t_{\min} = (1/k) \ln B$ とすれば、(6) 式に示すような制約条件がつく。

* Kenji NAITO & Norihiko SHIRAIISHI: Type-classification of the RICHARDS function and its application for the forest stand growth curve (II) A study on the decreasing types of the RICHARDS function

** 宇都宮大学農学部 Fac. of Agr., Utsunomiya Univ., Tochigi 321

*** 東京大学農学部 Fac. of Agr., Univ. of Tokyo, Tokyo 113

$$t \geq t_{\min} \quad (6)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y &= \lim_{t \rightarrow \infty} A/(1 - Be^{-kt})^{|n|} = A \\ \lim_{t \rightarrow t_{\min}} y &= \lim_{t \rightarrow t_{\min}} A/(1 - Be^{-kt})^{|n|} = \infty \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Ak^2 |n| Be^{-kt} (|n| Be^{-kt} + 1) / (1 - Be^{-kt})^{|n|+2} \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式の右辺各項は正であるから, $d^2 y/dt^2 > 0$ である。以上の結果, V型の曲線は, $t \rightarrow \infty$ で下限値 A をもち, $t \rightarrow t_{\min}$ で発散し, 変曲点をもたない下に凸の減少曲線といえる。 y 切片は, A より大きな値をとりうる。ただし, $B > 1$ になると, $t_{\min} > 0$ となり, $t = 0$ において関数は定義されない。

4. VIII 型の場合 ($n < 0, k < 0, B < 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y &= \lim_{t \rightarrow \infty} A/(1 + |B|e^{kt})^{|n|} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y &= \lim_{t \rightarrow -\infty} A/(1 + |B|e^{kt})^{|n|} = A \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Ak^2 |n| B |e|^{kt} (|n| B |e|^{kt} - 1) / (1 + B |e|^{kt})^{|n|+2} \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式において $|nB|e^{kt} = 1$ のとき, 曲線は変曲点をもつ。変曲点の座標は, 次のように書ける。

$$t_f = \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{|nB|}, \quad y_f = A/(1 + |n|)^{|n|}$$

以上の考察の結果, 一般にⅧ型の曲線は, 上限値 A , 下限値 0 をもつシグモイド型曲線を表わす。 $\lim_{|n| \rightarrow \infty} y_f = A/e$ であるから, $A/e < y_f < A$ である。ただし, $|nB|$ の値により, $t \geq 0$ なる領域において, 曲線は異なった形を呈する。

$|nB| > 1$ のときには, 変曲点は, $t < 0$ なる領域において現われ, $t \geq 0$ なる領域において, 曲線は下に凸の減少曲線となる。 y 切片は 0 と A の間の値をとりうる。

$|nB| \leq 1$ のときには, 変曲点は, $t \geq 0$ なる領域に現われ, 曲線はシグモイド型曲線となる。 y 切片は A/e と A の間の値をとりうる。

以上の考察の結果, 4 個の減少型 R 関数は, 上限値 A と下限値 0 をもち, 変曲点を表現することもできるⅢ型, Ⅷ型のグループと, 変曲点をもたず, 下限値 A をもつⅡ型, V型のグループに大別できる。林分の立木密度の減少という現象を考えると, 0 でない下限値を表現できるという点において, Ⅱ, V型は減少関数として適用可能と考えられる。(6) 式のような t に関する制約条件については, 第 I 報でも述べたように, 今後十分検討する必要がある。

III. 減少型 R 関数の微分方程式とパラメータの意味

林分平均個体重と立木密度を, それぞれ, y, N と表わすこととし, y の生長は, (9) 式に示される微分方程式に従い, y と N の間には, (10) 式に示されるべき乗関係が成立するものとする。

$$dy/dt = \alpha y^m - \beta y \quad (9)$$

$$Ny^r = K \quad (10)$$

ここで, α, β, r, K, m は定数とする。(10) 式は, (11) 式のように変形され, (11) 式の両辺を N で微分すると, (12) 式をうる。

$$y = (K/N)^{1/r} \quad (11)$$

$$dy/dN = -(1/r) \cdot K^{1/r} \cdot N^{-(1+r)/r} \quad (12)$$

(9) 式左辺の dy/dt は, $dy/dt = (dy/dN) \cdot (dN/dt)$ と変形されるので, (9) 式に (11), (12) 式を代入して整理すると, (13) 式を得る。

$$dN/dt = \alpha' N^{m'} - \beta' N \quad (13)$$

ここに, α', β', m' は, それぞれ, (14), (15), (16) 式で表わされる。

$$\alpha' = -r \alpha K^{(m-1)/r} \quad (14)$$

$$\beta' = -r \beta \quad (15)$$

$$m' = 1 + \frac{1-m}{r} \quad (16)$$

(9), (13) 式の一般解は, 前報(3)で示したように, 本報の(1)式で表現され ($n = 1/(1-m)$ または $1/(1-m')$), とともに R 関数を表わす。R 関数が, べき乗変換に対して, その関数形を保存するということは, 大隅(4), 箕輪(1)らの指摘するところでもある。

(14), (15), (16) 式から明らかのように, $r > 0, K > 0$ とすれば, α と α', β と $\beta', (1-m)$ と $(1-m')$ の符号は, 逆転する。このことは, y と N に (9), (10) 式のような仮定を設けると, y を表わす R 関数が I 型であれば, 対応する N の R 関数は V 型となることを意味するものであり, y と N を表わす R 関数のあいだには, 図-1 に示すような型の対応関係が存在する。(9), (10) 式において, $m = 0, r = 1$ と仮定すれば, y の増加を表わす R 関数は, MITSCHERLICH 曲線となり, y の増加に対応した N の減少を表わす R 関数は, logistic 曲線となる。

RICHARDS(5), 大隅(4)が指摘するように, (1) 式で示される R 関数は, $n \rightarrow \pm \infty$ としたとき, GOMPertz 曲線を表わす。また, 箕輪(2)は, 「GOMPertz 曲線は, べき乗変換に対してその形を保存する。」と指摘しているが, y の増加曲線に I 型またはⅧ型の極限 ($n \rightarrow$

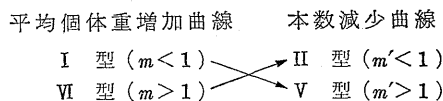


図-1. 平均個体重増加曲線にR関数を仮定し、平均個体重と立木本数に(10)式のべき乗関係を仮定したときの本数減少曲線を表わすR関数の型の対応

$+\infty$ or $-\infty$) としての GOMPERTZ 曲線を仮定した場合、(10) 式の関係为满足する N の減少曲線は、それぞれ、V型またはII型の極限 ($n \rightarrow -\infty$ or $+\infty$) としての GOMPERTZ 曲線によって表わされる。

(13) 式において、 $A = (\alpha'/\beta')^{1/(1-m')}$ とおけば、前報(3)の(3)式で示したように、 A は、 $t \rightarrow \infty$ としたときの N の極限值を表わし、(13) 式は、 $m' < 1$ (II型)、 $m' > 1$ (V型) の場合、前報(3)の(9)、(10)式と同じ要領で、それぞれ、(17)、(18)式のように変形される。

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -\beta' \{1 - (A/N)^{1-m'}\} \quad (17)$$

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -|\beta'| \{(N/A)^{m'-1} - 1\} \quad (18)$$

(17) 式の右辺は、相対減少率を意味するもので、 $N \rightarrow \infty$ のとき、右辺は $-\beta'$ ($\beta' > 0$) となり、 $N \rightarrow A$ のとき、右辺は 0 に近づく。この場合、相対減少率は、 N の値の減少によって、その値が抑制される。また、(18) 式も相対減少率を意味するが、 N が A よりきわめて大きいとき、右辺の絶対値は比較的大きな値をとり、 $N \rightarrow A$ としたとき、0 に近づく。(18) 式において $N \rightarrow \infty$ とすると、右辺の絶対値は $|\beta'|$ より大きな値をとることができ、(17) 式と (18) 式を比較すると、(18) 式のほうが減少の初期段階で、大きな減少率を表わす。

さて、(13) 式の一般解を (19) 式のように書くと、両式のパラメータの間には、前報(3)の(3)式と同じように、(20) 式の関係が成立する。

$$N = A'(1 - B'e^{-k't})^{1/(1-m')} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} A' &= (\alpha'/\beta')^{1/(1-m')} \\ B' &= (\alpha'/\beta' - N_0^{1-m'}) \cdot \beta'/\alpha' \\ k' &= \beta'(1-m') \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで N_0 は、 $t=0$ のときの N を表わす。

減少型 R 関数の曲線の特徴で調べたように、 A' は、立木本数の極限值を与え、 k' は、減少のスピードを表わすものと理解される。ヒルミ(8)も述べているように、地位の悪い林分ほど、その立木本数の極限值が大きくなるということは、林学における一つの知見である。 α'/β' の値が、地位に関係なく一定であると仮定すれば、 A は、 m' の値によって変化し、 m' の値によって地位

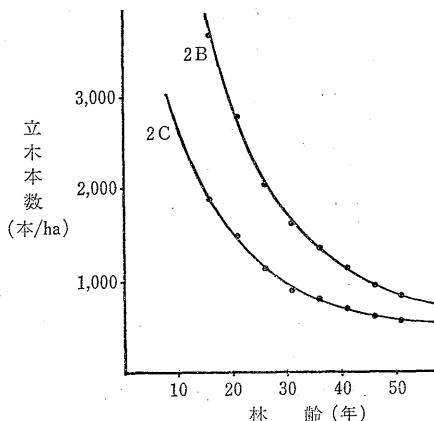


図-2. SPURR 立木本数とその減少曲線
● 実測値

の表現される可能性がある。

B' は、 $m' < 1$ (II型)、 $m' > 1$ (V型) の場合、前報(3)の(11)、(12)式と同じように、それぞれ (21)、(22) 式のように変形される。

$$B' = -\{1 - (A'/N_0)^{1-m'}\} / (A'/N_0)^{1-m'} \quad (21)$$

$$B' = 1 - (A'/N_0)^{m'-1} \quad (22)$$

(21)、(22) 式の $|B'|$ の値は、その表現の形の違により、異なったものを意味するが、立木本数の初期値 N_0 と、その極限值 A' との相対的大きさの関係を意味するという内容において、共通するものがあり、立木本数 N_0 に関係するパラメータと理解される。

IV. 実際の資料への適用例

資料は、第I報(3)で用いた SPURR ら(7)の論文の資料と、ヒルミ(8)の著書に載っているチューリン教授の作成したマツ収穫表の立木本数資料を用いた。

パラメータ計算は、NECのPC 8801を用いて行った。計算のためのプログラムは、M法、N法どちらでも実行できるよう改められた。さらに、適当な m ないし n の値を与え、残る3個のパラメータを求める計算を繰り返し、その中から、推定誤差を最小にするパラメータの組合せを選び出し、次に、その値を初期値として m ないし n も含めた4個のパラメータを計算するよう改善された。この結果、多少の反復計算を必要とするが、以前の方法にくらべ、計算作業は飛躍的に簡易化された。

V. 結果と考察

SPURRのプロット2Bおよび2Cの立木本数資料に、R関数をあてはめた結果は、図-2、表-1に示すとおりである。プロット2Bの林齢12年の立木本数資料は、異常に大きな値をとり、パラメータの収束値が得られな

表-1. SPURR の立木本数資料におけるパラメータの値

Plot	A	B	k	m
2B	402.23	-2.2511	0.040547	0.64919
2C	481.85	-42.955	0.099775	-0.65481

表-2. チューリンのマツ収穫表立木本数資料に対するパラメータの値

地 位	A	B	k	m
1a	181.82	0.76607	0.011475	1.3223
1	210.79	0.72151	0.012489	1.2813
2	239.76	0.80026	0.011979	1.3316
3	252.65	0.80753	0.010826	1.3283
4	411.81	0.21308	0.015716	1.0578
5	655.68	-1.2692	0.019116	0.76729
5a	1229.3	-4.2058	0.025330	0.56430

表-3. チューリンのマツ収穫表における平均幹材積と立木本数の型の対応

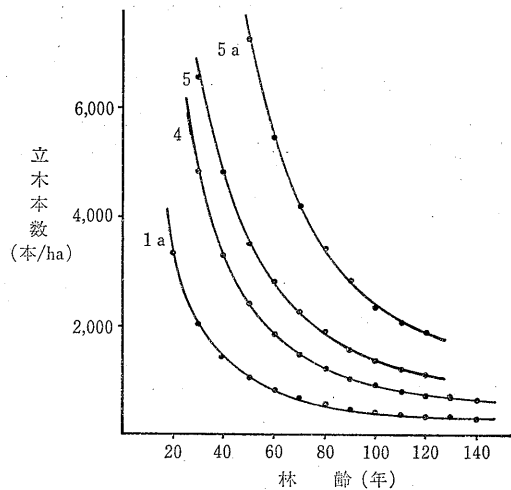
地 位	平均幹材積	立 木 本 数
1a	VI 型	V 型
1	VI "	V "
2	I "	V "
3	VI "	V "
4	VI "	V "
5	I "	II "

表-4. チューリンのマツ収穫表立木本数資料における m' と α'/β' の値

地 位	m'	α'/β'
1a	1.3223	0.18689
1	1.2813	0.22192
2	1.3316	0.16245
3	1.3283	0.16258
4	1.0578	0.70609
5	0.76729	4.5237
5a	0.56430	22.196

かったので、計算には用いなかった。また、チューリンのマツ収穫表の立木本数資料にあてはめた結果は、図-3、表-2 に示すとおりである。ただし、この場合も、地位4と5の林齢20年の立木本数資料は、SPURRのプロット2Bの場合と同じ理由で、計算から除外された。いずれの場合も、あてはまりの精度はよく、減少曲線の型は、II型かV型であることが確認された。

平均幹材積と立木本数の間に、(9)、(10)式のような仮定を設けると、両者の変化を表わすR関数の間には、図-1に示された型の対応関係が想定される。チューリンのマツの資料を用いてこの対応関係を調べた結果は、表-3に示すとおりであるが、図-1のような対応関係は認められなかった。このことは、本報で設けた仮定の誤りを意味するのか、資料のもつ誤差の影響の結果か、今後検討する必要がある。

図-3. チューリンのマツ収穫表立木本数とその減少曲線
● 実測値

また、 m' ないし n' の値によって、林分の地位が表現される可能性について指摘したが、チューリンのマツの資料において、 m' と α'/β' の値を計算した結果は、表-4に示すとおりである。表-4より明かなように、 α'/β' が地位に関係なく一定であるということは、認められないが、地位が悪くなるにつれ、 m' の値が減少する傾向が認められる。

M法とN法の優劣に関しては、SPURRの資料の場合、大きな差は認められなかった。しかし、チューリンのマツの資料のうち、地位4のように、 m' の値が1に近い値をとるとき、すなわち、曲線が GOMPERTZ 曲線に近づいたとき、パラメータの初期値設定が非常に困難になる場合がある。この場合、 m' ないし n' の値を順次変化させて、残る3個のパラメータを最初に求め、その中から適当な4個のパラメータの組合せを選び出して、その値を初期値として最終計算を行った。このとき、M法では、 m' の値を等間隔で変化させても、R関数の指数部 $n'=1/(1-m')$ の値は等間隔に変化しない。一方、N法では、 n' の値を直接変化させることができるので、4個のパラメータの初期値を決定する段階で、計算作業が非常に簡便化された。

VI. お わ り に

4個の減少型R関数の曲線の特徴について検討を加え、II、V型のR関数が、林分の生長を考えるときの減少曲線を表現するものとして適当であることを明らかにし、その場合、パラメータのもつ意味についても、若干の考察を加えた。また、SPURRとチューリンのマツ取

穫表の資料を用いて、実際の立木本数減少曲線が、Ⅱ型かⅤ型のR関数で表現されることを確認した。

チューリンのマツの資料において、地位の低下にともなって m' の値が減少する傾向が認められた。しかし α'/β' の値は、地位間で一定ではなく、 m' の値によってのみ地位を判定することは、無理のようである。

また、平均幹材積の増加と立木本数の減少を表わすR関数の間に、図-1に示されるような型の対応関係が認められなかった。その理由の一つには、論理の展開上設けたいくつかの仮定に、誤りがあったことが考えられる。一方、実測値への適合度という点では、R関数は、logistic, MITSCHERLICH, GOMPERTZ 曲線と比較して、パラメータの数が1個多いため、一番よい精度を示すと考えられる。しかし、実測値に誤差が含まれていた場合、R関数は、それだけ敏感にその影響を受け、計算されるパラメータの値も変わる。このような資料のもつ誤差が原因して、図-1に示すような、R関数の間の型の対応が認められなかったとも考えられる。この問題については、今後さらに検討し、報告する予定である。

また、前報で作成したパラメータ計算のプログラムは改善され、本報における計算作業は、非常に簡易化された。その詳しい内容は、文献(6)を参照されたい。

最後に、本報を作成するにあたり、貴重な助言と指導をいただいた東京大学森林経理学研究室の平田 種 男 博士、南雲秀次郎博士、箕輪 光 博 博士(現三重大学農学部)に厚くお礼申しあげる。

引用文献

- (1) 箕輪光博: モデル雑感. 林業統計研究会誌 5: 37~40, 1980
- (2) ———: 生長モデルとしてのワイブル分布について. 林業統計研究会誌 7: 44~53, 1982
- (3) 内藤健司・白石則彦: RICHARDS function の分類と林分生長曲線への応用(I) 増加型関数について. 日林誌 65: 248~252, 1983
- (4) 大隅真一: RICHARDS の生長函数. 林業統計研究会誌 2: 47~58, 1977
- (5) RICHARDS, F. J.: A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Bot. 10: 290~300, 1959
- (6) 白石則彦: BASIC による RICHARDS 関数あてはめのプログラム. 林業統計研究会誌 8: 50~57, 1983
- (7) SPURR, S. H., YOUNG, L. J., BARNES, B. V. & HUGHES, E. L.: Nine successive thinning in a Michigan white pine population. J. For. 55: 7~13, 1957
- (8) ХИЛЬМИ, Г. Ф. (太田邦昌監訳): 物理生態学序説. 237 pp, 築地書館, 東京, 1974

(1982年8月31日受理)

学会記事

○昭和58年度「朝日賞」候補推薦のお知らせ

朝日賞は、昭和49年度まで文化、社会奉仕、体育の3部門に分かれていましたが、50年度からこれを一本化して学術、芸術、科学技術、社会福祉、体育、その他あらゆる分野を選考の対象とし、各分野で傑出した業績をあげ、わが国の文化・社会の発展と向上に多大の貢献をした個人または団体に贈ることになりました。

ご推薦いただいた候補者につきましては、広く各界の

意見を聞いたうえで、本社内に設ける「朝日賞委員会」で選考し、受賞者を決定いたします。

今年度は原則として、昭和58年1月1日から同12月31日までに完成または完成予定の業績を対象としますが、長年にわたる業績にも贈ることができます。また賞は、正賞を賞牌とし、別に副賞(賞金: 1件につき100万円)を贈ります。

推薦締切日: 昭和58年9月30日

推薦票提出先・連絡先: 朝日新聞社企画部

「朝日賞」係