

林木の生長に関する理論的考察 (4)

Log - Mitscherlich式と単木の生長およびワイブル分布の一般化と相対生長

誌名	日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society
ISSN	0021485X
著者名	箕輪,光博
発行元	日本林學會
巻/号	66巻5号
巻号補足	
掲載ページ	p. 183-191
発行年月	1984年5月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council
Secretariat



論 文

林木の生長に関する理論的考察 (IV)
log-MITSCHERLICH 式と単木の生長および
ワイブル分布の一般化と相対生長

箕輪 光 博*

箕輪光博：林木の生長に関する理論的考察 (IV) log-MITSCHERLICH 式と単木の生長およびワイブル分布の一般化と相対生長 日林誌 66: 183~191, 1984 本報は、既報で提案した log-MITSCHERLICH 式と一般化されたワイブル分布をもとに、単木の生長と相対生長について論じたものである。はじめに、log-MITSCHERLICH 式を単木の生長モデルとして用いることにより、ベキ変換型の単木生長式を導き、log-MITSCHERLICH 式型生長とワイブル分布型生長の間には密接な関連のあることを明らかにする。ついで、ワイブル分布を線型の連立微分方程式の形に一般化し、二つの変量間の関係を表わす分布型相対生長式を誘導し、その例として二つの樹高曲線式をとりあげた。考察の項では、BAILEY, 山倉, 菊沢, 上野らの研究と、本報の単木生長モデルおよび分布モデルとの関係を比較検討した。

MINOWA, Mitsuhiro : A theoretical approach to forest growth modeling (IV) Individual tree growth and allometry derived from the log-MITSCHERLICH equation and a generalized WEIBULL distribution, respectively J. Jap. For. Soc. 66 : 183~191, 1984 This paper concerns the derivation of an individual tree growth model and allometry by using the log-MITSCHERLICH equation presented in previous papers and a generalized WEIBULL distribution, respectively. First, the log-MITSCHERLICH equation is applied to individual tree growth modeling, producing a power transformation which gives the relationship between tree sizes at different ages in the stand development and resulting in the WEIBULL distribution type growth. It indicates that there is a good coincidence between the log-MITSCHERLICH type growth and the WEIBULL distribution type growth. Second, by transforming the WEIBULL distribution into a linear differential equation and by taking the two variables together, a generalized WEIBULL distribution and the corresponding allometry are derived. Some height-diameter curves are discussed in terms of the derived distribution type allometry. Finally, the tree growth models and the distribution models presented are compared with other ones developed by BAILEY, YAMAKURA and SHINOZAKI, KIKUZAWA, and UENO.

I. は じ め に

近年、ワイブル分布を用いて林木の直径分布を記述もしくは予測する研究が盛んになりつつある(1, 5, 7, 14, 16)。木梨, 西沢らによる一連の「林分シミュレーションに対する生長モデルの研究」はその典型的な例である。

他方筆者(8~10)は、相対生長方向および時間方向の変換という観点からワイブル分布を論じてきた。さらに BAILEY(2)は、同一趣旨の詳細な研究を発表し、単木レベルの生長と林分レベルの生長との関係を考究した。ま

た菊沢(6)は、時間方向のベータ型分布の変換という観点から、無間伐林分の単木生長を論じた。

そこで本報では、まず既報(11~13)の log-MITSCHERLICH 式系とワイブル分布がどのような関係にあるかを考察し、前者の単木生長方程式としての特質について述べる。ついで、適当な変換を介してワイブル分布を線型微分方程式に帰着させ、新たな相対生長式の誘導やワイブル分布の一般化について考察する。考察の項では、単木生長方程式や分布の導出もしくはそれらの一般化と関連する山倉ら(20)、菊沢(6)、上野(19)らの研究をとりあげ、本報との関係を論ずる。

* 三重大学農学部 Fac. of Agr., Mie Univ., Tsu 514

II. 単木生長とワイブル分布

BAILEY(2) は、二時点間の分布の変換という観点から、単木レベルの生長モデル (tree-level growth model) と林分レベルの直径分布モデル (stand-level diameter distribution model) との関係を考察し、次のような変換式

$$X_2 = \beta_0 + \beta_1(X_1 - \beta_3)^{\beta_2} \quad (1)$$

が、ワイブル分布、対数正規分布等の形を保存することを明らかにした。ここで、 X_1, X_2 は林齢 t_1, t_2 における直径、 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ は定数である。

他方筆者(8) は、ワイブル分布がベキ変換 $y = A \cdot x^B$ に対してその形を保存することを指摘した際に、この形の不変性は時間方向の変換

$$x_{t+1} = \alpha + \beta \cdot x_t^r \quad (2)$$

に対しても成り立つことを示唆した。(1) 式と (2) 式は、本質的に同等であり、一種の単木生長式である。そこで本章では、同様の立場から、単木の生長方程式として、前報(13)で述べた log-MITSCHERLICH 系の特別な場合を取り上げ、生長方程式のパラメータの変化とワイブル分布の形状パラメータ c の関係を考察する。

林齢 t において、単木の直径 x の対数変換値 $y = \ln x$ が、次の形の線型微分方程式を満たす場合を考える。すなわち、

$$\frac{dy}{dt} = py + q \quad (3)$$

まず $p \neq 0$ の場合は容易に積分できて

$$y(t) = y_0 e^{pt} + \frac{q}{p} (e^{pt} - 1) \quad (4)$$

となる。ここで p, q はパラメータ、 $y_0 = y(0)$ である。(4) 式より、二時点 t と $(t+u)$ における y の値、つまり $y(t+u)$ と $y(t)$ を結ぶ関係式

$$y(t+u) = \frac{q}{p} (e^{pu} - 1) + e^{pu} \cdot y(t) \\ = A + B \cdot y(t) \quad (5)$$

が得られる。ただし、 u は時間間隔を表わす定数で、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{q}{p} (e^{pu} - 1) \\ B &= e^{pu} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。このように、 $y(t+u)$ と $y(t)$ の関係は、切片 A 、傾き B の直線で表わされる。さらに、(4)、(5) 式において、 $p \rightarrow 0$ とすると $p=0$ の場合の関係式が得られ、 $A=qu$ 、 $B=1$ となる。

傾き B の値は、 $p>0$ 、 $p=0$ 、 $p<0$ に対応して、 $B>1$ 、 $B=1$ 、 $B<1$ となる。他方 A の値は、 $q>0$ とすれば p の増加関数で $p>0$ のとき $A>qu$ 、 $p<0$ のとき $A<qu$

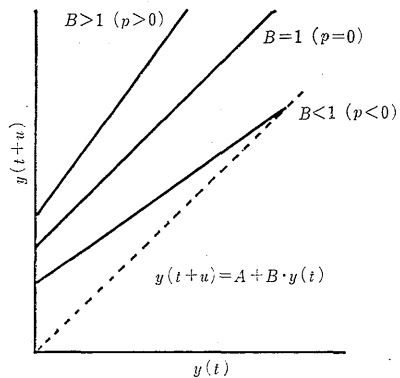


図-1. log-MITSCHERLICH 式から誘導される単木生長型

Individual tree growth types derived from the log-MITSCHERLICH equation

となる。なお一般に、 $y(t+u) \geq y(t)$ なので、 $q < 0$ の場合は無視してよいと思われる。

図-1 は、 $p>0$ 、 $p=0$ 、 $p<0$ に対応する三つの場合を模式的に示したものである。これらはそれぞれ対数による指数増殖型、一定型、飽和型の生長曲線を表わす。第二の一定型は、生長率が一定であることを意味するので、もとの変量 $x(t)$ は指数型の曲線となる。そこで、 $y(t)$ をもとの変量 $x(t)$ に戻すと、

$$x(t+u) = A \cdot x(t)^B \quad (7)$$

なるベキ変換式が得られる。ただし、(5) 式の $\exp(A)$ をあらためて A とした。

次に、このベキ変換式を媒介に、上記の三つの場合とワイブル分布の形状パラメータ c との関係を調べる。BAILEY(2) も指摘しているように、また次章でみるように、(7) 式型のベキ変換式が存在する場合には、林齢 $t, (t+u)$ における形状パラメータ $c(t)$ と $c(t+u)$ の間に

$$c(t+u) = c(t)/B \quad (8)$$

なる関係が成り立つ。したがって、 p と $c(t)$ との関係は

イ) $p>0$ ($B>1$) の場合は $c(t+1) < c(t)$ となり、形状パラメータ c の値は減少する。

ロ) $p<0$ ($B<1$) の場合は、逆に c の値は増加する。

ハ) $p=0$ ($B=1$) の場合は、 c の値は変わらない。

となる。このように、形状パラメータ c の増減は、単木の生長方程式のパラメータ p の正負に対応している。とくに、 $p=0$ ならば c の値は不変である。なお、付言すれば、単木の生長方程式 (3) 式のもう一つのパラメータ q は、ワイブル分布の尺度パラメータ b を規定している。いずれにせよ、単木レベルのパラメータ (p, q) と林分

表-1. ワイブル分布およびベキ変換式*のパラメータの変化
(無間伐林分の場合)

Time-trend of the parameters of the WEIBULL distribution and of the power transformation* derived from the log-MITSCHERLICH equation using unthinned plot data of a *Cryptomeria japonica* plantation

林 齢 Age (yr)	本数密度 Density (No./ha)	平均直径 Xmean (cm)	標準偏差 Xσ (cm)	変動係数 C _v	ワイブルパラメータ			ベキ変換式の パラメータ	
					位 置 a	尺 度 b	形 状 c	A	B
25	6,250	11.5	1.9	0.17	5.0	7.2	3.8	0.98	0.94
30	6,250	13.6	2.1	0.15	6.0	8.4	4.1	0.56	1.27
35	6,200	14.6	2.6	0.18	7.0	8.5	3.2	0.79	1.12
40	6,150	15.4	2.8	0.18	8.0	8.3	2.9	0.85	1.04
48	5,500	16.9	3.1	0.18	9.0	8.9	2.8	0.89	1.04
50	5,350	17.1	3.3	0.19	9.0	9.1	2.6	0.82	1.13
57	4,900	18.5	3.4	0.18	11.0	8.5	2.3	0.97	1.00
60	4,850	18.7	3.5	0.19	11.0	8.7	2.3	0.97	1.00
65	4,300	19.9	3.6	0.18	12.0	8.9	2.3	0.86	1.13
70	3,900	20.1	3.6	0.18	13.0	8.0	2.1		

* $D(t+u)=a(t+u)+A \cdot (D(t)-a(t))^B$

Source: TAKEUCHI and others (18)

表-2. ワイブル分布およびベキ変換式*のパラメータの変化
(間伐林分の場合)

Time-trend of the parameters of the WEIBULL distribution and of the power transformation* derived from the log-MITSCHERLICH equation using thinned plot data of a *Cryptomeria japonica* plantation

林 齢 Age (yr)	本数密度 Density (No./ha)	平均直径 Xmean (cm)	標準偏差 Xσ (cm)	変動係数 C _v	ワイブルパラメータ			ベキ変換式の パラメータ	
					位 置 a	尺 度 b	形 状 c	A	B
11	3,837	12.4	3.3	0.27	1.0	12.6	3.9	0.77	1.10
16	3,489	14.4	3.6	0.25	3.0	12.7	3.5	1.38	0.83
20	1,922	18.1	3.5	0.19	5.0	14.4	4.2	0.66	1.15
25	1,688	20.2	4.0	0.20	7.0	14.6	3.7	0.54	1.24
30	1,688	21.8	4.7	0.22	9.0	14.3	3.0	0.84	1.05
35	1,362	24.3	5.1	0.21	11.0	14.9	2.8	0.79	1.03
43	929	28.5	6.1	0.21	13.0	17.4	2.7	0.97	0.99
45	929	29.4	6.4	0.22	13.0	18.4	2.8	0.63	1.16
52	929	31.4	7.3	0.23	15.0	18.5	2.4	0.94	1.01
55	922	31.9	7.6	0.24	15.0	19.1	2.4	0.95	0.99
60	915	33.4	8.2	0.25	15.0	20.8	2.4		

* $D(t+u)=a(t+u)+A \cdot (D(t)-a(t))^B$

Source: TAKEUCHI and others (18)

レベルのパラメータ (b, c) の間には1対1の対応関係があり、両者いずれも区間内では一定であるが区間ごとに变化する。

表-1 は、竹内らの報告(18) から、スギの無間伐林分の資料を選び出し、直径分布にワイブル分布をあてはめた結果を示したものである。この例では、形状パラメータ c の値はほとんどの区間において減少しており、林齢とともに減少傾向にある。なお、この場合の生長方程式は、

$$x(t+u)-a(t+u)=A \cdot [x(t)-a(t)]^B \quad (9)$$

なる形をしている。ここで、 $a(t)$ は林齢 t における位置パラメータである。ベキ指数 B は、(8) 式より

$$B=c(t)/c(t+u)$$

と定まる。(9) 式から明らかなように、ベキ指数 B の値は、位置パラメータ $a(t)$ のとり方に依存している。これは、ワイブルの形状パラメータ c が位置パラメータ a の影響を受けることの別の説明になっている。

表-2 は同様の分析を間伐林分(18) について試みたものである。この場合もほとんどの区間において $B > 1$ であるので、 c の値は林齢とともに減少傾向にある。つまり、大部分の区間がイ) のケースに属しており、ロ) やハ) のケースは相対的に少ない。

III. 相対生長とワイブル分布

本章では、ワイブル分布を満たす二つの変量（たとえば直径と樹高）を同時にとりあげ、時間断面における両変数の相互関係を考察する。したがって、本章の考え方は、同一変量（たとえば直径）の二時点間の関係を論じた前章の考え方と対をなすものである。

変量 x と y の相対生長（アロメトリー）は、一般に、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{df} &= B \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{df} \\ \text{または} \quad y &= A \cdot x^B \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

の形に表現され、要因 f としては時間とか地力因子を考えるのが普通である。ここでは、少し方向を変えて、要因 f として x や y の分布に関係する量を取りあげることにする。

さて、 x が次の形のパラメータが2個のワイブル分布

$$g(x) = \frac{c_x}{b_x} \left(\frac{x}{b_x} \right)^{c_x-1} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{b_x} \right)^{c_x} \right] \quad (11)$$

に従っているものとする。ただし、 b_x, c_x はそれぞれ尺度、形状パラメータである。続いて、

$$R(x) = \int_x^\infty g(x) dx = \exp \left[- \left(\frac{x}{b_x} \right)^{c_x} \right]$$

の両辺の対数を2回とり、 $f = \ln(\ln(1/R))$ とおいてさらに微分すると

$$\frac{dx}{df} = \frac{x}{c_x} \quad (12)$$

なる微分方程式が得られる。これより、形状パラメータ c_x の逆数は、 x の相対増加率に等しいことがわかる。逆に、(12) 式を積分すると、

$$x = x_0 \cdot \exp \left(\frac{f}{c_x} \right) \quad (13)$$

となる。ただし、 $x_0 = x(0)$ である。つまり x_0 は積分定数で、 $f=0$ ($R=e^{-1}$) における x の値である。したがって、定義により

$$R = e^{-1} = \exp \left[- \left(\frac{x_0}{b_x} \right)^{c_x} \right]$$

であるから、これから $x_0 = b_x$ となる。このように、ワイブル分布を f を独立変数とする形 ((12) または (13) 式) で表現すると、二つのパラメータ (b_x, c_x) の意味が明確になる。一方は積分定数であり、他方の逆数は相対増加率である。しかも、(12) または (13) 式は最も取り扱いやすい指数型の方程式である。

次に、(12) 式に (10) 式の相対生長式を代入すると、

$$\frac{dy}{df} = \frac{By}{c_x} = \frac{y}{c_y} \quad (14)$$

となり、 y も f の指数関数となる。したがって、 y も形

状パラメータ c_y のワイブル分布に従うことがわかる。ただし、

$$B = c_x / c_y \quad (15)$$

である。したがって (14) 式を積分することにより

$$y = y_0 \cdot \exp \left(\frac{f}{c_y} \right) = b_y \cdot \exp \left(\frac{f}{c_y} \right) \quad (16)$$

となる。ただし、 b_y は y の尺度パラメータである。さらに (10)、(13)、(15)、(16) の各式から、相対生長式に含まれるもう一つのパラメータ A は、

$$A = b_y \cdot (b_x)^{-B} \quad (17)$$

と定まる。

以上より、(10) 式の相対生長式と (12) 式と (14) 式、もしくは (13) 式と (16) 式の間には1対1の対応関係のあることがわかった。とくに、(15) 式と (17) 式は、分布と相対生長式間の橋わたしをする式として重要である。たとえば、 x を直径、 y を樹高とすれば、(10) 式の相対生長式は最も簡単な場合の樹高曲線式である。実際、 $x=D$ 、 $y=H-1.2$ とおけば、(10) 式は、STOF-FELS-Van SOEST の式とよばれる

$$H = 1.2 + A \cdot D^B$$

に一致する (15)。

樹高曲線式のパラメータは、通常、最小自乗法等による式のあてはめから直接に求められる。これに対して本報の場合には、 x と y のワイブルパラメータから、(15) 式と (17) 式の関係を利用して間接的に求められる。そこで、寺崎のヒノキ間伐試験地報告 (17) から、秩父ヒノキ林分普通間伐区の資料を例にとり、ワイブルパラメータと樹高曲線式のパラメータを求めてみよう。手順は次のようになる。

- 1) 直径 (D_i) 分布のデータから、各直径階ごとに、 $R_i = n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + \dots$ を計算する。ただし、 N_i を i 番目の直径階の本数、 N を総本数とするとき、 $n_i = N_i / N$ である。
- 2) $f_i = \ln(\ln(1/R_i))$ と x_i に (13) 式をあてはめ、 x_0, c_x を推定する。ただし、 $x_i = D_i - a_D$ (a_D は直径 D の位置パラメータ) である。
- 3) まったく同様に、樹高 (H_i) 分布データから (16) 式を介して y_0, c_y を推定する。ただし、 $y_i = H_i - a_H$ (a_H は樹高 H の位置パラメータ) である。

表-3 は、このようにして求めたワイブルパラメータ ($a, b = x_0, c$) とこの場合の樹高曲線式

$$H = a_H + A \cdot (D - a_D)^B \quad (18)$$

のパラメータ (A, B) の推定値を示したものである。表中の相対誤差 ER は、たとえば $ER = 100 \times (D - \hat{D}) / \hat{D}$ で定義され、ある R_i に対する直径の実測値と推定値の

表-3. 直径、樹高へのワイブル分布のあてはめ、
および樹高曲線*のパラメータの推定
Height-diameter curve* derived from a pair of
the WEIBULL distributions and their parameters
for an experimental thinning plot of *Chamae-*
cyparis obtusa

(Age: 34 yr: No. of stems: 142)

1) Diameter ($\bar{D}=17.4$ cm: $\sigma_d=3.8$ cm)

Observed		Calculated	Relative
$R(I)$	$D(I)$	$\hat{D}(I)$	error $ER(I)$
0.993	9.0	9.1	-1.2
0.958	11.0	10.9	0.6
0.880	13.0	12.7	2.3
0.746	15.0	14.6	2.8
0.486	17.0	17.3	-1.9
0.331	19.0	19.0	0.2
0.176	21.0	21.0	0.2
0.085	23.0	22.7	1.1
0.014	25.0	26.0	-3.8
0.007	27.0	27.0	-0.0
Parameters: $a_D=7.0$		$x_0=11.556$	$c_x=2.919$

2) Height ($\bar{H}=13.5$ m; $\sigma_H=2.1$ m)

Observed		Calculated	Relative
$R(I)$	$H(I)$	$\hat{H}(I)$	error $ER(I)$
0.993	8.5	8.5	-0.4
0.958	9.5	9.7	-2.0
0.908	10.5	10.5	0.3
0.838	11.5	11.2	2.8
0.690	12.5	12.3	1.8
0.556	13.5	13.1	3.1
0.338	14.5	14.4	0.9
0.176	15.5	15.5	-0.3
0.056	16.5	17.0	-3.0
0.028	17.5	17.7	-1.1
0.007	18.5	18.8	-1.8
Parameters: $a_H=7.0$		$y_0=7.192$	$c_y=3.208$

* $H=a_H+A \cdot (D-a_D)^B$: $A=1.92$, $B=0.91$

Source: Laboratory Silviculture (17)

差の程度を表わす。この結果からみる限り、適合度は良好である。前章の単木生長方程式と同様、(18)式の樹高曲線式のパラメータ A , B の値は、位置パラメータ a_D , a_H の定め方に依存している。この場合は、 $A=1.92$, $B=0.91$ なので、樹高曲線 (18) 式のベキ指数 B は 1 に近い。なお、表-3 のワイブルパラメータ x_0 と c は、(13) 式と (16) 式を

$$x_i = x_0(f_i')^p \quad (f_i' = e^{f_i}, p=1/c)$$

の形に変形した後、デミングの方法により求めたものである。

次に、 x のみがワイブル分布に従い、 y がワイブル分布からずれる場合、たとえば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{df} &= px \\ \frac{dy}{df} &= sx + qy \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

なる連立微分方程式を考える。ここで、 p, q, s は定数である。(19) 式は、 $s=0$ のとき、前述の x, y がともにワイブル分布に従う場合に帰着する。これに対して、 $s \neq 0$ のときは、 x の影響を受ける分だけ、 y はワイブル分布からずれるわけである。この考え方は、本シリーズの第二報(12)において、GOMPERTZ 式を log-MITSCHERLICH 式系に一般化した場合のそれとまったく同じである。(19) 式を定数変化法で解くと

$$x = x_0 e^{pf} \quad (20)$$

$$\begin{cases} y = \beta x_0 e^{pf} + (y_0 - \beta x_0) e^{qf} & (p \neq q) \\ y = (sx_0 f + y_0) e^{pf} & (p = q) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y = (sx_0 f + y_0) e^{pf} & (p \neq q) \\ y = (sx_0 f + y_0) e^{pf} & (p = q) \end{cases} \quad (22)$$

となる。ここで、

$$\beta = s/(p-q)$$

$$x_0 = x(0), y_0 = y(0)$$

である。

(20) 式は前述の (13) 式と同じである。これに対して (21) 式は、 x の影響を受ける分だけやや複雑な形をしている。したがって、(21) 式に含まれる三つのパラメータ (β, y_0, q) を求めるには若干の工夫を必要とする。たとえば、(20) 式と (21) 式から f を消去すると、

$$y = \beta x + (y_0 - \beta x_0) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda} \quad (23)$$

$$(\lambda = q/p)$$

となるので、この式を利用して (21) 式のパラメータを間接的に求める方法が考えられる。すなわち、(20) 式のパラメータ x_0, p を前述の方法で単独に求めておき、ついで (23) 式のパラメータをデミングの方法により推定する。その結果として (β, y_0, q) が定まるようにすればよいわけである。この考え方は、既報(12, 13)において、 ω - ρ (ω : 平均単木材積、 ρ : 本数密度) トラジェクトリーを介して、 ω 曲線のパラメータを推定したやり方と本質的に同じである。

さて、 $z = y/x$ とおけば、(23) 式は、

$$z = \beta + \alpha \cdot x^r \quad (24)$$

なるパラメータが 3 個の r 次式となる。ただし、

$$\begin{cases} \alpha = (y_0 - \beta x_0) \cdot x_0^{-\lambda} \\ r = \lambda - 1 \end{cases} \quad (25)$$

である。(24) 式から、パラメータ (β, α, r) が定まると、 $\lambda = q/p$ と (25) 式より、(23) 式もしくは (21) 式のパラメータ (β, y_0, q) が確定する。前述の寺崎のヒノキ間伐試験資料 (17) を用いて、デミングの方法により各パラメータを求めると、表-4 のようになる。この場合も、 $x = D - a_D$, $y = H - a_H$ である。したがって、樹高曲線式に相当する (24) 式は、

$$\frac{H - a_H}{D - a_D} = \beta + \alpha (D - a_D)^r \quad (26)$$

表-4. 一般化されたワイブル分布および樹高曲線式のパラメータの推定

Height-diameter curve* derived from a generalized WEIBULL distribution and its parameters for an experimental thinning plot of *Chamaecyparis obtusa*

$F=\log(\log(1/R))$		Actual	Calculated	Relative
$R(I)$	$F(I)$	$H(I)$	$\hat{H}(I)$	error $ER(I)$
0.993	-4.958	8.5	8.5	-0.5
0.958	-3.149	9.5	9.7	2.6
0.908	-2.338	10.5	10.6	0.6
0.838	-1.733	11.5	11.3	-1.8
0.690	-0.991	12.5	12.4	-1.0
0.558	-0.539	13.5	13.2	-2.5
0.338	0.081	14.5	14.4	-0.6
0.176	0.552	15.5	15.5	0.2
0.056	1.059	16.5	16.9	2.5
0.028	1.274	17.5	17.6	0.3
0.007	1.602	18.5	18.6	0.7

Values of the parameters:

$$\begin{aligned} \beta &= +0.371 & \alpha &= +1.150 & \lambda &= +0.504 & s &= +0.005 \\ x_0 &= +11.556 & p &= +0.343 & c_x &= +2.915 & a_x &= +7.000 \\ y_0 &= +8.235 & q &= +0.173 & c_y &= +5.789 & a_y &= +6.000 \end{aligned}$$

* $H = a_H + \beta(D - a_D) + \alpha(D - a_D)^\lambda$

Source: Laboratory Silviculture (17)

なる形になる。この樹高曲線式は、特別な場合として、TROREY の樹高曲線式(15)

$$\frac{H-1.2}{D} = \beta + \alpha \cdot D$$

を含んでいる ($\lambda=2$, $r=1$)。

表-4 の計算手順は次のとおりである。

- 1) 直径 (D_i) 分布のデータから、各直径階ごとに、 $R_i = n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + \dots$ を計算する。ただし、 N_i を i 番目の直径階の本数、 N を総本数とすると、 $n_i = N_i/N$ である。
- 2) R_i と x_i に (20) 式をあてはめ、パラメータ x_0 , p を定める。ただし、 $x_i = D_i - a_D$ である。
- 3) 樹高 (H_i) 分布から、 H_i に対応した R_i を計算する。
- 4) この R_i に対応する $x_i (= D_i - a_D)$ をすでに求めたパラメータ x_0 , p を用いて (20) 式から計算し、 x_i と $y_i (= H_i - a_H)$ に (24) 式をあてはめて、パラメータ β, α, λ ($=r+1$) を定める。

表-3 と表-4 を比較してみると、各 R_i に対応する H_i の推定精度は、若干後者のほうが上回っているようにみえる。(26) 式の樹高曲線式のパラメータが1個ふえた分だけ、精度はよくなったわけである。しかしその差はごくわずかである。ところで、 x と y がともにワイブル分布に従う場合は、(19) 式より $\beta=0$ ($s=0$) となり、この場合の λ は (10) 式の相対生長係数 B に一致す

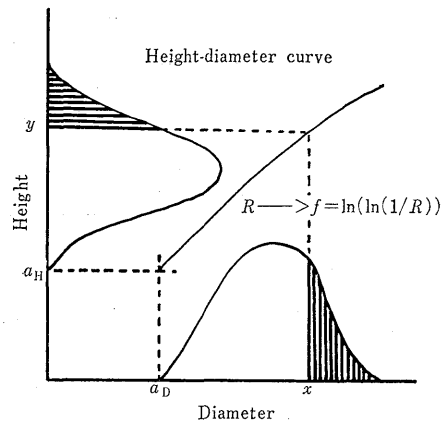


図-2. ワイブル分布の一般化と樹高曲線
Height-diameter curve derived from a generalized WEIBULL distribution

$$H = a_H + \beta(D - a_D) + \alpha(D - a_D)^\lambda$$

る。表-4 の結果をみると、 $\beta=0.371$, $\lambda=0.504$ であり、 β がふえた分だけ、 λ は $B=0.91$ (表-3) より小さくなっている。このように、 β と λ は、 $\beta=s/(p-q)$, $\lambda=q/p$ なる関係を通じて、(19) 式のパラメータ (p, q, s) に関連しており、 x と y の分布、 x と y の相対生長関係に対して考えるうえで重要な指標である。

以上は、 y のみがワイブル分布からずれる場合についての考察であるが、 x と y がともにワイブル分布からずれる場合には、 x と y は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{df} = px + ry + u \\ \frac{dy}{df} = sx + qy + v \end{cases} \quad (27)$$

なる一般的な線型微分方程式で表現される。この場合も上式から f を消去すれば、(17), (23) 式に対応する相対生長式が得られる。すなわち、これまでに述べた二つのケースは、(27) 式の特殊な場合である。(27) 式は、 f を媒介変数とする一つの線型システムを定義する。これは前報(13)の log-MITSCHERLICH 式系と対をなすものであり、ワイブル分布系ともよぶべき内容を備えている。

最後に、 x と y の分布を対にし、そこから x と y の相対生長式を誘導するという本章の考え方を模式的に示すと、図-2 のようになる。

IV. 考 察

本章では、第二、三章の主要な論点とこれまでの研究との関係について考察する。

1. 区間生長方程式型について

第二章において、三つの区間生長方程式を導き、それぞれの型とワイブル分布の形状パラメータとの関係を観察した。この区間生長方程式の特徴は、各区間ごとに、すべての単木の生長方程式のパラメータを同一とみなす点にある。通常、全区間を通してみれば、単木ごとの生長方程式のパラメータは個々に相違している。この相違は、単木ごとの生長方程式のパラメータを全区間を通じて不変としたために出現するものであり、逆に、パラメータは区間ごとに変わるとすれば、単木間のパラメータの違いは無視できると思われる。そのような意味での単木の生長方程式を、ここでは“区間生長方程式”とよぶわけである。さらに、各区間生長方程式は、対数線型の log-MITSCHERLICH 系の特別な場合として誘導され、常に各区間において (7) 式の形のベキ関係を満たす。ここに、log-MITSCHERLICH 系とワイブル分布との密接な関係がうかがわれる。すでに BAILEY(2)は、

$$x(t) = \theta \cdot \exp(\mu t^k) \quad (\theta, \mu, k \text{ は定数})$$

なる単木生長方程式を導き、各種直径分布との関係を論じているが、この式は任意の区間 $(t, t+u)$ において (7) 式のごときベキ関係を満足しない。その意味では、生長方程式のパラメータとワイブル分布のパラメータとの関係を論ずるのに不便である。

他方、穂積ら(3, 4)は、ベータ型の個体重 w の分布

$$\phi(w) = C \{(A-1)w + B\}^{(2A-1)/(1-A)} \quad (28)$$

を導き、スギ林ではこの型の分布が広くみとめられること、および大きさ w 以上の総個体数 N と w の間には、次の関係式が成り立つことを示した。

$$N(w) = \frac{C}{A} \{(A-1)w + B\}^{A/(1-A)} \quad (29)$$

ここで、 A, B, C はパラメータである。さらに菊沢(6)は、(28) 式のベータ分布および (29) 式をトドマツの人工林に適用し、ある生長区間内ではベータ分布が保存されること、個体の大きさの順位は変わらないこと、枯死は生じないこと、区間内の平均材積生長量は一定であること、および単木材積 w と直径の間には $w = kD^b$ (k, b はパラメータ) なるベキ関係が成立すること等の仮定を

$$\bar{D}_i = \left(\frac{y_0 + iG}{y_0} \right)^{1/b} \bar{D}_0 \quad (30)$$

なる単木生長方程式を導いた。ここで、 $\bar{D}_i, \bar{D}_0$ はそれぞれ順位を同じくする単木の区間のはじめ、終りにおける直径、 y_0 は区間のはじめにおける林分材積、 G は i 年間あたりの平均材積生長量である。(30) 式は、 $\bar{D}_i$ と $\bar{D}_0$ が比例関係にあることを示しており、本報の (6) の

場合に相当する。つまり (3) 式、(7) 式において、それぞれ $p=0, B=1$ とした場合である。さらに菊沢(6)は、(29) 式を用いて 5 年間 ($i=5$) ごとの単木の生長を記述し、生長段階が 1958~1963 年、1963~1968 年、1968~1973 年と進むにつれて、(30) 式の係数が大きくなる傾向のあることを指摘している。これに対して、本報の場合には、表-1, 2 に示すように、(7) 式の係数 A, B の変化には特別な傾向がみられない。

以上に述べた BAILEY の単木生長方程式、 $\bar{D}_i$ と $\bar{D}_0$ の関係を示す菊沢の式 ((30) 式) は、単木の生長と分布を同時に考えるという立場から誘導されたものである。その意味では、すでに述べた筆者の考え方(8~10)や本報の論理も同じであるが、平均次元での林木の生長を記述する既報の log-MITSCHERLICH 式系とワイブル分布の統一を意図している点で大きな相違がある。また、この考え方は、二対のワイブル分布を基礎とする次節の論理に深く関連している。

2. 分布方向の相対生長について

山倉ら(20)は、植物の個体重と、個体重の順位とに関する差分方程式を利用して、植物個体重の新しい分布密度関数を導いた。たとえば、大きい順から順番に番号 N をつけ、対応する個体重を $w(N)$ とすると、 N 番目と $(N+1)$ 番目の個体重の間には、

$$w(N+1) = aw(N) + b \quad (31)$$

なる差分方程式が成り立つ。ここで、 a, b はパラメータである。これを解くと w は N の関数として

$$w(N) = ce^{-\alpha N} + w_0 \quad (32)$$

で与えられる。ただし、 $\alpha = -\ln a, w_0 = b/(1-a)$ 。また、 c は任意の定数である。さらに、2 階の差分方程式を利用して、より一般的な式

$$w(N) = c_1 e^{-\alpha N} - c_2 e^{\alpha N} + w_0 \quad (33)$$

を導いている。ここで、 α, w_0, c_1, c_2 はパラメータである。

この山倉の方法は、(29) 式で示されるような w を独立変数、 $N(w)$ を従属変数とする穂積の MNY 法(4, 20)を、 N を独立変数、 $w(N)$ を従属変数とする方向に転換させたもので、実にすぐれた着想である。さらに、穂積の方法では、微分方程式が中心であるのに対し、山倉の方法では (31) 式で示されるような差分方程式が主役を果たしている。これに対して本報の第三章で述べた $f = \ln(\ln(1/R))$ を独立変数とする分布の扱い方は、既報(11~13)の log-MITSCHERLICH 系との形式的類似にヒントを得たものであるが、同時に山倉の着想が大きな刺激となっている。いま、林分全体の本数を N_* とすれば、 $R = N/N_*$ であり、これを $f = \ln(\ln(1/R))$ と変換すれば

ば、 f はもはや離散量ではなく連続量となり、(19) 式や (27) 式のような微分方程式に帰着する。これらの微分方程式は形式的に第三報(13)の log-MITSCHERLICH 式系と同等であり、時間方向と空間方向 (f 方向) の林木生長を関連づけて考えるうえで重要である。なお同じく微分方程式を基盤とするにしても、 w の代わりに R を独立変数としていること、 R を $f = \ln(\ln(1/R))$ に変換して簡単な指数型の線型微分方程式を導いている点において、穂積の MNY 法と異なる。

(20) 式と (21) 式、(32) 式と (33) 式の間には類似の関係がある。ともに、 f や N の指数関数の形をしている。実際 (20) 式からは、 $x = X(f) - a_X$ (a_X は X の位置パラメータ) とおけば、

$$X(f+1) = e^p \cdot X(f) + a_X(1 - e^p)$$

なる差分方程式が得られる。これは形式上 (31) 式と一致する。同様に (21) 式からは、

$$X(f+2) - (e^p + e^q)X(f+1) + e^{p+q}X(f) = 0$$

なる 2 階の差分方程式が得られる。このように、ワイブル分布は $f = \ln(\ln(1/R))$ なる変換を通じて山倉の密度分布関数に関連しているのである。したがって、(19) 式を一般化した (27) 式からは、さらに複雑な差分方程式が得られることになろう。

ところで、前節に述べた菊沢の式 ((30) 式) も、(29) 式において w と N の役割を逆に、つまり w を N の関数としてみるにより誘導されたものである。ここでも N がパラメータの役割を果たしており、この N を消去すれば 2 時点間での生長関係式が得られ、しかも各時点でベータ分布は保存されているわけである。 N を消去することにより、2 時点間の変量関係を導くというこの考え方は、 f を介在として二つの変量 x と y の相対生長関係を論じた第三章の論理と本質的に同等である。異なる点は、前者は時間方向の変換であること、 N がそのまま独立変数として用いられていること、ベータ分布同志の変換であることであり、これに対して後者は、空間方向の変換であること、 N を変換して $f = \ln(\ln(1/R))$ を独立変数として用いていること、ワイブル分布同志の変換であることである。そこで、時間方向の分布変換を論じた第二章と空間方向 (分布方向) の変換を論じた第三章の論理との関係を考察する。

3. ワイブル分布を媒介とした単木生長と相対生長の関係

筆者(8,9) はすでに、ワイブル分布が時間方向のベキ変換に対して保存されること、また log-MITSCHERLICH 式とワイブル分布はそのベキ変換を介して双対的關係にあることを指摘した。本報の第二章の内容は、それをよ

り明確に示したものである。換言すれば、ワイブル分布と対をなす単木生長方程式は、log-MITSCHERLICH であることを微分方程式を仮定することにより証明したわけである。

他方、第三章では、ワイブル分布を $f = \ln(\ln(1/R))$ を独立変数とする微分方程式の形に書き換え、 f を消去することにより、2 変量 x と y の相対生長式を導いた。そこで、この考えを時間方向の変換に対して適用すると、ただちに第二章の結果が得られることを示そう。

区間 $(t, t+u)$ において、同一の f に対応する $x(t)$ 、 $x(t+u)$ がともにワイブル分布に従うとすると、 $x(t)$ を x 、 $x(t+u)$ を y とみなすことにより、(18) 式から (9) 式と同じ形の単木生長方程式が得られる。したがって、第二章の論理を逆にたどることにより、この場合の単木生長方程式は (3) 式の log-MITSCHERLICH 式ということになる。次に、 $x(t)$ がワイブル分布、 $x(t+u)$ が非ワイブル分布というように、2 時点間でワイブル分布が保存されない場合を考える。たとえば、 $x(t)$ 、 $x(t+u)$ が (19) 式の微分方程式系を満たすとする、この場合の単木生長方程式は (23) 式から

$$x(t+u) = \beta \cdot x(t) + \alpha \cdot x(t)^2 \quad (34)$$

となる。この式の右辺は、 $x(t)$ に比例する項と $x(t)^2$ に比例する項から成り、 $x(t+u)$ がそれらの和として表現されることを示している。つまり、第二章のイ) またはロ) とハ) の混合形である。また、菊沢の式 ((30) 式) は $\alpha = 0$ の場合であり、第二章の (9) 式は $\beta = 0$ の場合である。したがって、対応する微分方程式は、(3) 式で示される log-MITSCHERLICH 式の混合形となる。さらに、 $x(t)$ 、 $x(t+u)$ が (27) 式の一般的な微分方程式を満たす場合には、対応する単木生長方程式もより複雑な形となろう。

以上、第二と三章の関係について述べたが、両者の関係を模式的に示すと図-3 のようになる。

4. ワイブル分布の一般化について

上野(19)は、拡張ワイブル分布として、 x 軸上を m だけ左へ移動した形の 4 パラメータの分布を提案しているが、本報流の表現で示すと

$$\frac{dx}{df} = px + u = p(x+m)$$

となる。ただし、 $u = pm$ 、 $m \geq 0$ である。この式は、 $m = 0$ ($u = 0$) のときは通常のワイブル分布に一致する。このように、上野の拡張ワイブル分布も、本報流の微分方程式の形で示すと、本報の特別な場合に包含される。さらに上野の拡張における考え方と筆者の考え方の違いは、前者が x のみを単独に扱っているのに対し、後者は

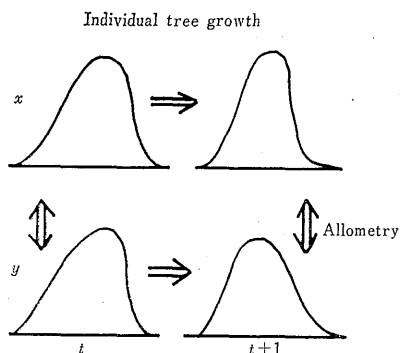


図-3. 単木生長と相対生長の関係
Relationship between individual tree growth
and allometry through a generalized WEIBULL
distribution

x と y の相対生長関係を拠り所としている点にある。それを端的に示しているのが、(19) 式もしくは (27) 式の連立線型微分方程式である。このように、単純な線型の微分方程式に帰着させ、ついでそれらを連立させて拡張に至るというプロセスは、既報において log-MITSCHERLICH 式系を導いた考え方とまったく同じである。

V. お わ り に

本報の考え方は、図-3 に集約されている。単木の生長と相対生長を分布を介して考えているうちに、ワイブル分布と log-MITSCHERLICH 式が互いに類似の線型微分方程式を満たすことがわかったのは、一つの収穫であった。一つのワイブル分布を単独に考えずに、いくつかのワイブル分布をいっしょに取り扱うという本報の考え方は、結局、log-MITSCHERLICH 式系と同様のシステムという発想につながっていく。既報で示したように、後者は林分を平均次元でシステムとして記述するモデルである。これに対して本報のワイブル分布論は、林木間の関係をシステムとして記述するモデルである。

次の機会には、本報で導いた単木生長方程式や既報の log-MITSCHERLICH 式系を手がかりに、林分の間伐モデルについて検討することにした。

引用文献

- (1) 阿部信行: トドマツ人工林の施業法に関する研究 (II) 道有林におけるトドマツ人工林の収穫予想表の作成. 北海道林試報 18: 71~93, 1980

- (2) BAILEY, R.L.: Individual tree growth derived from diameter distribution models. For. Sci. 26: 626~682, 1980
- (3) HOZUMI, K.: Studies on the frequency distribution of the weight of individual trees in a forest stand (III) A beta-type distribution. Jap. J. Ecol. 21: 152~167, 1971
- (4) ———, SHINOZAKI, K. & Tadaki, Y.: Studies on the frequency distribution of the weight of individual trees in a forest stand (I) A new approach toward the analysis of the distribution function and the $-3/2$ th power distribution. Jap. J. Ecol. 18: 10~20, 1968
- (5) 柿原道喜: 北海道東部地方における広葉樹天然林の解析 (V) ヤマナラシ天然林の林分構造ならびに生長量. 91 回日林論: 77~78, 1980
- (6) KIKUZAWA, K.: Yield-density diagram for todo-fir plantations (II) Diameter growth of individual trees in unthinned stands. J. Jap. For. Soc. 65: 52~56, 1983
- (7) 木梨謙吉: 人工林の直径分布について (II) ワイブル分布のパラメータと年齢・直径・本数との関係. 90 回日林論: 95~96, 1979
- (8) 箕輪光博: モデル雑感. 林統研誌 5: 37~40, 1980
- (9) ———: 生長モデルとしてのワイブル分布について. 林統研誌 7: 44~53, 1982 a
- (10) ———: ワイブル型林分生長過程への DP の適用. 日林誌 64: 198~200, 1982 b
- (11) ———: 林木の生長に関する理論的考察 (I) log-MITSCHERLICH 式の理論. 日林誌 64: 461~467, 1982 c
- (12) ———: 林木の生長に関する理論的考察 (II) 自己関引モデルの検討. 日林誌 65: 135~142, 1983 a
- (13) ———: 林木の生長に関する理論的考察 (III) 三次元 log-MITSCHERLICH 式系. 日林誌 65: 417~426, 1983 b
- (14) 南雲秀次郎・白石則彦・田中万里子: スギ林分収穫表調製法のシステム化に関する研究—東京大学千葉演習林スギ林を対象として—. 東大演報 71: 269~330, 1981
- (15) 西沢正久: 森林測定. 348pp, 農林出版, 東京, 1972
- (16) ———: 林分シミュレーションに対する生長モデルの研究 (III) ワイブルのパラメータの推定による直径確率分布の予測. 87 回日林論: 87~88, 1976
- (17) 林業試験場造林学研究室: ひのき林の間伐試験. 林試研報 166: 23~84, 1964
- (18) 竹内公男・長谷川茂: 千葉演習林における林分生長資料. 東大・演習林 19: 69~175, 1975
- (19) 上野洋二郎: ワイブル分布の拡張について. 林統研誌 8: 27~36, 1983
- (20) YAMAKURA, T. & SHINOZAKI, K.: Frequency distribution of individual weight, stem diameter and height plant stands (I) Proposed new distribution density functions derived by using the finite difference method. Jap. J. Ecol. 30: 307~321, 1980

(1983 年 7 月 9 日受理)