論　　文

標本における極値の漸近分布関数の誘導*

内　藤　健　司**

内藤健司：標本における極値の漸近分布関数の誘導　日林誌 70：255～260, 1988
本報の目的は標本における極値の漸近分布関数の誘導に関してグンベルとは異なる簡単な新しい誘導法を提案することである。初めにグンベルと同様母集団の分布関数として，指数タイプ，PARETOタイプ，有限タイプの関数を仮定し，それぞれの分布関数に新しくパラメータ B をもちこむことによって標本における極値の漸近分布関数が簡単に導けることを示した。次にグンベルと筆者の導いた極値の漸近分布関数を比較し両者が一致することを示し，極値の極限分布関数と漸近分布関数の違いについて論じた。最後に標本最大値の漸近分布関数として求められたある関数はGOMPERTZ関数と，標本最小値の漸近分布関数として求められたある関数は筆者によって拡張された一般化 WEIBULL関数と，さらに標本最大値の厳密分布関数として表現されるある関数は RICHARDS関数と一致することを指摘した。植物の成長機構を単純な多重構造システムと考えると，その成長関数は標本における極値の分布関数と考えられ，これらの三つの関数は林分成長モデルの研究において重要な役割を果たすものと期待される。

NAITO, Kenji：**New derivation of asymptotic distribution functions of extremes J. Jpn. For. Soc. 70：255～260, 1988**　The objective of this paper is to propose a new derivation of asymptotic distribution functions of extremes which is different from that by GUMBEL. First, using a new parameter B in the initial distribution functions assumed by GUMBEL, it is shown that the asymptotic distributions of extremes can be derived more simply than those by GUMBEL. Second, the asymptotic distribution functions derived here are compared with those by GUMBEL showing that they are equivalent to each other. Also discussed is the difference between the limit distribution function and the asymptotic distribution function of extremes. Last, it is pointed out that one of the asymptotic distributions of the largest member of a sample coincides with the GOMPERTZ function, and that two of the asymptotic distribution functions of the smallest member of a sample coincide with the generalized WEIBULL function which had been proposed by the author, and that one of the exact distribution functions of the largest member of a sample coincides with the RICHARDS function. Considering a plant as a multi-component system, the plant growth function can be understood as the distribution function of the shortest or longest life of the component. Therefore, these three functions are expected to play an important role in stand-growth modelling research.

I. はじめに

最近の林分成長解析に関する研究においては，logistic, MITSCHERLICH, GOMPERTZ, RICHARDS, WEIBULL といった関数が胸高直径，樹高，胸高断面積等の成長関数あるいは分布関数として多く用いられており，これらの関数はそれなりに現実のデータをうまく表現できる。

一方，筆者（内藤，1985）は林分の成長機構をひとつのシステムとしてとらえる考え方を提案した。たとえば植物は本来最終的な大きさまで成長する可能性をもっているがその可能性がロックされており，ロックが壊れることによって成長していくと考えるならば，植物の成長はロックの寿命の分布関数として考えられる。ひとつのロックが多くのユニットから構成されていてすべてのユニットが故障しない限りロックの機能が保証されるならば，植物の成長はロックを構成するユニットの最大寿命の分布と考えられ，反対にひとつ

* 本報告は第98回日本林学会大会において口頭発表した「極限分布関数としての WEIBULL関数の誘導」を大幅に手直ししたものである。

** 宇都宮大学農学部　Dept. of Agric., Utsunomiya Univ., Utsunomiya 321

のユニットが故障してもロックの機能が保証されなくなるならば，植物の成長はロックを構成するユニットの最小寿命の分布として考えられる。したがって極値統計学の立場から標本最大値あるいは標本最小値の分布関数としても導かれる RICHARDS, GOMPERTZ, WEIBULL 関数には林分の成長解析の手段として用いられるひとつの根拠があると考えられる。

標本における極値の分布関数に関しては，フィッシャーらやグンベル等多くの研究者によって数多くの報告がなされているが，本報告は極値の漸近分布関数の誘導についてグンベル（GUMBEL, 1958）とは異なる新しい方法を紹介するとともに，漸近分布（asymptotic distribution）と極限分布（limit distribution）の違いについて論ずるものである。

以下の報告に先立って本報における漸近分布と極限分布という用語の説明をしておく。漸近分布という用語は竹内（1974）の著書にも見受けられるが，岩波書店の『数学辞典（第3版）』には載っていない。一方，極限分布という用語については岩波書店の『数学辞典』にその定義が載っており，「確率変数列に対しその分布の列が分布 F に収束するとき，F をその確率変数列の極限分布（limit distribution）という。」

本報においては，パラメータ n を含む分布関数 $F_n(x)$ において $n\to\infty$ としたとき，確率変数 x の定義されるすべての区間において $F_n(x)$ が $F(x)$ に収束する場合 $F(x)$ を $F_n(x)$ の極限分布と呼ぶことにする。一方，$n\to N$, $(N\gg 0)$ としたとき $F_n(x)$ が近似的に $A_n(x)$ で表現され，$n\to\infty$ としたとき $A_n(x)$ で $F(x)$ を近似できる場合，$A_n(x)$ を $F_n(x)$ の漸近分布と呼ぶこととする。$A_n(x)$ は n の関数となるパラメータを含むが，$F(x)$ には n が含まれていない。

II. グンベルの誘導法の概要

グンベル（GUMBEL, 1958）は標本を抽出する母集団の分布関数として三種類のタイプの関数を仮定し，標本最大値の漸近分布関数を誘導するとともに対称原理によって対応する標本最小値の漸近分布を示した（表-1）。

グンベルの誘導では対称原理と特性極値が重要な役割を果たしておりそれらの簡単な説明を初めに行う。

二つの分布関数 $F(x)$ と $G(x)$ とのあいだに(1)式に示す関係式が成立するとき，この二つの関数はお互いに対称であるといわれる。

表-1. 標本における極値の漸近分布関数

母集団の分布	標本最大値	標本最小値	備考
指数タイプ $F_{(x)}=1-e^{-\alpha x}$	$\Phi_n^{(1)}(x)=\exp\{-e^{-\alpha_n(x-u_n)}\}$ $\alpha_n>0$	${}_1\Phi_n^{(1)}(x)=1-\exp\{-e^{\alpha_1(x-u_1)}\}$ $\alpha_1>0$	$\alpha_1=\alpha_n$ $u_1=-u_n$
PARETO タイプ $F(x)=1-(x-\varepsilon)^{-k}$	$\Phi_n^{(2)}(x)=\exp\left\{-\left(\frac{u_n-\varepsilon}{x-\varepsilon}\right)^{k_n}\right\}$ $k_n>0, x\geqq\varepsilon,$ $u_n>\varepsilon\geqq 0$	${}_1\Phi_n^{(2)}(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{\omega-u_1}{\omega-x}\right)^{k_1}\right\}$ $k_1>0, x\leqq\varepsilon,$ $u_1<\omega$	$u_1=-u_n$ $k_1=k_n$ $\omega=-\varepsilon$
有限タイプ $F(x)=1-(\omega-x)^k$	$\Phi_n^{(3)}(x)=\exp\left\{-\left(\frac{\omega-x}{\omega-u_n}\right)^{k_n}\right\}$ $x\geqq\omega, u_n<\omega,$ $k_n>0$	${}_1\Phi_n^{(3)}(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x-\varepsilon}{u_1-\varepsilon}\right)^{k_1}\right\}$ $x\geqq\omega, k_1>0,$ $u_1>\varepsilon\geqq 0$	$u_1=-u_n$ $k_1=k_n$ $\omega=-\varepsilon$

$\Phi_n(x)$ の右肩の添字は母集団の分布タイプを表し，左下の添字がない場合は標本最大値の，添字が1の場合は標本最小値の漸近分布関数を表す．また原典ではPARETOタイプがCAUCHYタイプとなっている．

$$\begin{cases} F(-x)=1-G(x) \\ F'(-x)=G'(x) \end{cases} \qquad (1)$$

一方，$F(x)$ を分布関数としてもつ母集団からのサイズ n の標本における標本最大値 $X_{\max}$ と標本最小値 $X_{\min}$ の分布関数は $F(x)$ を用いてそれぞれ(2)，(3)式で与えられる。

$$\mathrm{Prob.}\{X_{\max}\leqq x\ ;\ n,\ F\}=F^n(x) \qquad (2)$$

$$\mathrm{Prob.}\{X_{\min}\leqq x\ ;\ n,\ F\}=1-\{1-F(x)\}^n \qquad (3)$$

また，$F(x)$ と対称な分布関数 $G(x)$ をもつ母集団からのサイズ n の標本における標本最小値の分布関数は，(3)式中の $F(x)$ を $G(x)$ でおきかえて求められる。したがって(1)式に示す対称性を考慮すると，お互いに対称な関数 $F(x)$ と $G(x)$ をそれぞれの分布関数としてもつ母集団からのサイズ n の標本における標本最大値と標本最小値の分布関数のあいだには(4)式に示す関係式が成立し，どちらか一方の分布関数が求まれば(4)式を用いて他方の分布関数も求められる。グンベルは(4)式に示す関係を対称原理[*1]と呼んでいる。

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{Prob.}&\{X_{\min}\leqq x\ ;\ n,\ G\} \\ &=\{1-G(x)\}^n \\ &=F^n(-x) \\ &=\mathrm{Prob.}\{X_{\max}\leqq -x\ ;\ n,\ F\} \end{aligned} \qquad (4)$$

$F(x)$ として logistic 関数 $F(x)=(1+e^{-x})^{-1}$ を考えると $F(x)$ と対称な関数 $G(x)$ も logistic 関数そのものとなり $F(x)$ と $G(x)$ は一致する。この場合対称原理

[*1] 筆者は既報（内藤，1985）において「対象原理」という用語を用いたがそれは誤りであり，その説明も $F(x)=G(x)$ となる特殊な場合にのみ限定したが，それは筆者の理解不足であった。

によって求められる標本最大値と標本最小値の分布関数は同一の母集団からの標本におけるものと考えられるが，表-1に示される標本最大値と標本最小値の漸近分布関数はお互いに対称ではあるがそれぞれ異なった分布関数をもつ母集団からの標本におけるものである点に注意を要する。

次に特性極値について説明する。母集団の分布関数を $F(x)$ とすれば，その母集団からのサイズ $n\ (n\geqq 2)$ の標本のなかでは $n\{1-F(x)\}$ 個の値が x より大きいことが期待される。そしてその期待値が1または $(n-1)$ となるような x の値をグンベルは特性最大値 u_n または特性最小値 u_1 と呼んでいる。

$$n\{1-F(u_n)\}=1,\quad nF(u_1)=1$$

お互いに対称な分布関数 $F(x)$ と $G(x)$ の特性最大値と特性最小値は符号が異なるだけでその絶対値は等しい。さらにグンベルは特性極値における強度関数を極値強度関数（α_n または α_1）と呼んでいるが，それらは次式で与えられる。

$$\alpha_n=\frac{F'(u_n)}{1-F(u_n)}=nF'(u_n)$$

$$\alpha_1=\frac{F'(u_1)}{1-F(u_1)}=\frac{n}{n-1}F'(u_1)$$

さて表-1において極値の漸近分布関数を誘導するに際し，グンベルは(5)式に示す公式を利用しているが，$1/n$ という項をくくり出すために特性最大値 u_n が巧みに用いられている。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a \qquad (5)$$

母集団の分布関数として指数タイプの関数 $F(x)$ を仮定した場合を例にとりあげると，初めにグンベルは $F(x)$ を特性最大値 u_n のまわりで展開する。

$$\begin{aligned}F(x)&=F(u_n)+\frac{x-u_n}{1!}F'(u_n)\\&\quad+\frac{(x-u_n)^2}{2!}F''(u_n)+\cdots\\&\quad+\frac{(x-u_n)^v}{v!}F^{(v)}(u_n)+\cdots\\&=1-\frac{1}{n}\left\{1-\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(x-u_n)^v}{v!}\cdot nF^{(v)}(u_n)\right\}\end{aligned}$$

逐次導関数 $F^{(v)}(u_n)$ を求めるために L'HÔPITALの定理を用いれば極値強度関数 α_n の定義から $nF^{(v)}(u_n)=(-1)^{v+1}\alpha_n{}^v$, $(v\geqq 1)$ となり，結局 $F(x)$ は近似的に次式で表現される。

$$F(x)=1-\frac{1}{n}\left\{1+\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(x-u_n)^v}{v!}(-1)^v\alpha_n{}^v\right\}$$

$$=1-\frac{1}{n}\exp\{-\alpha_n(x-u_n)\}$$

したがって標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n(x)$ は，

$$\begin{aligned}\Phi_n(x)&=\lim_{n\to\infty}F^n(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\exp\{-\alpha_n(x-u_n)\}\right]^n\\&=\exp[-\exp\{-\alpha_n(x-u_n)\}]\end{aligned}$$

となり，対応する標本最小値の漸近分布関数も対称原理によって計算することができる。

III. 極値の漸近分布関数の新しい誘導法

グンベルは漸近分布関数を誘導するに際して特性最大値と極値強度関数を巧みに利用したが，本報においては標本抽出を行う母集団の分布関数に新しいパラメータ B を導入する。このパラメータの意味については後で考察するが，以下の議論に先立って，(6)式に示す公式を確認しておく。

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (6)$$

ただし a は正の実定数である。(6)式左辺は $y=a^x$ という関数の $x=0$ における微係数の定義そのものでありその値が $\ln a$ となることは容易に理解されよう。

1. 指数タイプの場合

母集団の分布関数として(7)式に示す指数タイプの関数を仮定すると，この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は(8)式で与えられる。

$$F(x)=1-B\exp\{-\alpha x\} \qquad (7)$$

$$M_n(x)=F^n(x)=[1-B\exp\{-\alpha x\}]^n \qquad (8)$$

ただし $\alpha>0, 1>B>0, x>\frac{1}{\alpha}\ln B$ である。(8)式において $x=0$ とおき B について解くと $(-nB)$ は(9)式で表現される。

$$-nB=\frac{M_n{}^{1/n}(0)-1}{1/n} \qquad (9)$$

ここで非常に大きな n の値 N を考え，$n\to N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_n{}^{(1)}(x)$ で近似されるとすれば(6)式の公式により(10)式が得られる。

$$\lim_{n\to N}(-nB)=\ln\Phi_n{}^{(1)}(0) \qquad (10)$$

一方，(8)式は(11)式のように変形され，(5)式に示す公式と(10)，(11)式より $n\to N(N\gg 0)$ としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n{}^{(1)}(x)$ は(12)式で表現される。

$$M_n(x)=\left[1+\frac{(-nB)}{n}\exp\{-\alpha x\}\right]^n \qquad (11)$$

$$\Phi_n^{(1)}(x)=\lim_{n\to N} M_n(x)$$
$$=\exp[\ln \Phi_n^{(1)}(0)\cdot\exp\{-\alpha x\}] \qquad (12)$$

ここで $1>\Phi_n^{(1)}(0)>0$ であるから $|\ln \Phi_n^{(1)}(0)|=e^{\alpha c_{n1}}$ とおくと(12)式は(13)式のように変形される。

$$\Phi_n^{(1)}(x)=\exp[-\exp\{-\alpha(x-c_{n1})\}] \qquad (13)$$

さらに(7)式と対称な分布関数をもつ母集団を考えると，そこからの標本最小値の漸近分布関数 ${}_1\Phi_n^{(1)}(x)$ は対称原理により(14)式で与えられる。

$${}_1\Phi_n^{(1)}(x)=1-\exp[-\exp\{\alpha(x+c_{n1})\}] \qquad (14)$$

2. PARETOタイプの場合

母集団の分布関数として(15)式に示すPARETOタイプの関数を仮定すると，この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は(16)式で与えられる。

$$F(x)=1-B(x-\varepsilon)^{-k} \qquad (15)$$
$$M_n(x)=\{1-B(x-\varepsilon)^{-k}\}^n \qquad (16)$$

ただし $k>0$, $1>B>0$, $x\geqq B^{1/k}+\varepsilon$, ε は定数である。(16)式において $x=\varepsilon+1$ とおき B について解くと $(-nB)$ は(17)式で表現される。

$$-nB=\frac{M_n^{1/n}(\varepsilon+1)-1}{1/n} \qquad (17)$$

ここで非常に大きな n の値 N を考え，$n\to N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_n^{(2)}(x)$ で近似されるとすれば(6)式の公式により(18)式を得る。

$$\lim_{n\to N}(-nB)=\ln \Phi_n^{(2)}(\varepsilon+1) \qquad (18)$$

一方，(16)式は(19)式のように変形され，(5)式の公式と(18)，(19)式より $n\to N(N\gg 0)$ としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n^{(2)}(x)$ は(20)式のように表現される。

$$M_n(x)=\left\{1+\frac{(-nB)}{n}(x-\varepsilon)^{-k}\right\}^n \qquad (19)$$
$$\Phi_n^{(2)}(x)=\lim_{n\to N} M_n(x)$$
$$=\exp\left\{\ln \Phi_n^{(2)}(\varepsilon+1)\cdot(x-\varepsilon)^{-k}\right\} \qquad (20)$$

$1>\Phi_n^{(2)}(\varepsilon+1)>0$ であるから $|\ln \Phi_n^{(2)}(\varepsilon+1)|=c_{n2}{}^k$ とおくと(20)式は(21)式のように変形される。

$$\Phi_n^{(2)}(x)=\exp\left\{-\left(\frac{x-\varepsilon}{c_{n2}}\right)^{-k}\right\} \qquad (21)$$

さらに(15)式と対称な分布関数をもつ母集団を考えると，そこからの標本最小値の漸近分布関数 ${}_1\Phi_n^{(2)}(x)$ は対称原理により(22)式のように求められる。

$${}_1\Phi_n^{(2)}(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x+\varepsilon}{-c_{n2}}\right)^{-k}\right\} \qquad (22)$$

ただし $-\varepsilon\geqq x$, $c_{n2}>0$ である。

3. 有限タイプの場合

母集団の分布関数として(23)式に示す有限タイプの関数を仮定すると，この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は(24)式で与えられる。

$$F(x)=1-B(\omega-x)^k \qquad (23)$$
$$M_n(x)=\{1-B(\omega-x)^k\}^n \qquad (24)$$

ただし $k>0$, $1>B>0$, $\omega\geqq x\geqq\omega-B^{-1/k}$, ω は定数である。(24)式において $x=\omega-1$ とおき B について解くと $(-nB)$ は(25)式のように表現される。

$$-nB=\frac{M_n^{1/n}(\omega-1)-1}{1/n} \qquad (25)$$

ここで非常に大きな n の値 N を考え，$n\to N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_n^{(3)}(x)$ で近似されるとすれば，(6)式の公式により(26)式を得る。

$$\lim_{n\to N}(-nB)=\ln \Phi_n^{(3)}(\omega-1) \qquad (26)$$

一方，(24)式は(27)式のように変形され，(5)式に示す公式と(26)，(27)式より $n\to N$, $(N\gg 0)$ としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n^{(3)}(x)$ は(28)式で表現される。

$$M_n(x)=\left\{1+\frac{(-nB)}{n}(\omega-x)^k\right\}^n \qquad (27)$$
$$\Phi_n^{(3)}(x)=\lim_{n\to N} M_n(x)$$
$$=\exp\{\ln \Phi_n^{(3)}(\omega-1)\cdot(\omega-x)^k\} \qquad (28)$$

$1>\Phi_n^{(3)}(\omega-1)>0$ であるから $|\ln \Phi_n^{(3)}(\omega-1)|=c_{n3}{}^{-k}$ とおくと(28)式は(29)式のように変形される。

$$\Phi_n^{(3)}(x)=\exp\left\{-\left(\frac{\omega-x}{c_{n3}}\right)^k\right\} \qquad (29)$$

さらに(23)式と対称な分布関数をもつ母集団を考えると，そこからの標本最小値の漸近分布関数 ${}_1\Phi_n^{(3)}(x)$ は対称原理により(30)式で与えられる。

$${}_1\Phi_n^{(3)}(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x+\omega}{c_{n3}}\right)^k\right\} \qquad (30)$$

ただし $x\geqq-\omega$, $c_{n3}>0$ である。

IV. 考　　察

1. グンベルと筆者の誘導法の比較

母集団の分布関数として指数タイプの関数を仮定した場合を例にして，グンベルと筆者の誘導した漸近分布関数の比較を行う。グンベルと筆者の誘導結果を再掲すると以下のとおりである。

$$\Phi_n^{(1)}(x)=\exp\left[-\exp\{-\alpha_n(x-u_n)\}\right]$$

ただし u_n は特性最大値で α_n は特性最大値における

強度関数（極値強度関数）である。

$$\Phi_n^{(1)}(x)=\exp[-\exp\{-\alpha(x-c_{n1})\}]$$

ただし α は母集団の分布関数のパラメータ，c_{n1} は $\exp\{\alpha c_{n1}\}=|\ln \Phi_n^{(1)}(0)|$ を満足する。

(7)式に示す分布関数の強度関数 μ は定義により

$$\mu=\frac{F'(x)}{1-F(x)}=\frac{\alpha Be^{-\alpha x}}{Be^{-\alpha x}}=\alpha$$

となり，x と無関係に常に α となるので極値強度関数 α_n も α と等しくなる。

また(7)式に示す分布関数の特性最大値 u_n は定義により $n\{1-F(u_n)\}=1$ で与えられるので，u_n について解くと次式を得る。

$$u_n=\frac{1}{\alpha}\ln nB$$

一方，c_{n1} は $\exp\{\alpha c_{n1}\}=|\ln \Phi_n^{(1)}(0)|$ で与えられるが，(10)式より $\ln \Phi_n^{(1)}(0)=-nB$, $(n\to N)$ であるから c_{n1} は次式のように表現できる。

$$c_{n1}=\frac{1}{\alpha}\ln\{|\ln \Phi_n^{(1)}(0)|\}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\ln nB$$

さらに(7)式の代りに以下に示す logistic 型の分布関数を母集団に仮定した場合でも，筆者の誘導過程で $(-nB)$ の代りに (nB) を考えることによって同じ結論を得ることができる。

$$F(x)=\frac{1}{1+Be^{-\alpha x}}$$

一方，上式に示す logistic 型の分布関数の特性最大値 u_n と極値強度関数 α_n は定義によりそれぞれ

$$\alpha_n=\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n=\frac{1}{\alpha}\ln\{(n-1)B\}$$

と表現され非常に大きな n の値を考えると α_n と u_n はそれぞれ α, $\frac{1}{\alpha}\ln nB$ で近似される。

以上のことからグンベルの導いた標本最大値の漸近分布関数に含まれるパラメータ α_n と u_n は筆者の導いた漸近分布関数におけるパラメータ α と c_{n1} に等しいことが明らかとなった。

II章で述べたようにグンベルは標本抽出を行う母集団の分布関数をその特性最大値のまわりで展開し，次に L'HÔPITALの定理を用いて逐次導関数を極値強度関数で表現し最後に(5)式に示す指数関数に関する公式を利用して漸近分布関数を誘導した。これに対し筆者は母集団の分布関数に新しくパラメータ B をもちこみ，(5)，(6)式に示す指数関数と対数関数に関する公式を利用して漸近分布関数を誘導しているが，グンベルの誘導法と比較して筆者の誘導法のほうがより簡明であろう。筆者が新しくもちこんだパラメータ B は，母集団の分布関数が指数タイプの場合は一種の位置パラメータとして，PARETO タイプと有限タイプの場合は一種の尺度パラメータとして理解することができる。

2.　漸近分布関数と極限分布関数

グンベルは極値の漸近分布関数を導く過程で $n\to\infty$ という表現を用いているが，この表現は n を無限大にするというよりも n が非常に大きければという意味に理解すべきであろう。

標本抽出をする母集団の分布関数にどのような関数 $F(x)$ を仮定しても，$F(x)$ は標本のサイズ n と無関係であり $0\leqq F(x)\leqq 1$ なので標本最大値の極限分布関数 $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}F^n(x)=\begin{cases}1, & (F(x)=1)\\ 0, & (F(x)<1)\end{cases}$$

となり，標本最大値の極限分布関数はジョンソンら (JOHNSON and KOTZ, 1970) が指摘するようにつまらなく，あまり意味のない関数になってしまう。筆者は既報(内藤，1985)において次式に示す RICHARDS 関数の極限形 $(n\to\infty)$ として GOMPERTZ 関数が導かれると述べたが，先に指摘したと同じ理由で，GOMPERTZ 関数は RICHARDS 関数の漸近関数として導かれると訂正されなければならない。

$$W=A(1-Be^{-kt})^n$$

またリチャーズは RICHARDS 関数の極限形 (limiting form, $n\to\infty$) としての GOMPERTZ 関数を誘導するに際し，RICHARDS 関数の絶対成長率が $n\to\infty$ としたとき GOMPERTZ 関数の絶対成長率になることを示している (RICHARDS, 1959)。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kW\left\{\left(\frac{A}{W}\right)^{1/n}-1\right\}}{1/n}=kW\ln\left(\frac{A}{W}\right)$$

リチャーズは上記の式の成立する根拠として，本報(6)式に示す対数関数に関する公式を示しているが，(6)式中の a は n と無関係な定数である点に注意しなければならない。リチャーズが示した絶対成長率の極限形中の A/W はそれ自身 n の関数となっており，$n\to\infty$ としたときの W は 0 または A となる。その場合リチャーズの示した絶対成長率の極限形は無意味なものとなるであろう。したがってリチャーズの場合も

nの非常に大きな値に対して成立する近似式であり，GOMPERTZ関数をRICHARDS関数の極限形（limiting form）と呼ぶよりもむしろ漸近形（asymptotic form）と呼ぶべきである。

極値の漸近分布関数やRICHARDS関数のGOMPERTZ関数への近似は，二項分布のポアソン近似やスターリングの公式と同様nの値が非常に大きい場合に成立する一種の近似式と考えられ，(5)式に示す公式に見られるような厳密な意味で$n \to \infty$を考えた場合の極限形ではない。漸近分布関数はnの関数となっているが，漸近分布関数で$n \to \infty$を考えると極限分布関数を表現することができる。以上に述べてきた意味において漸近分布関数と極限分布関数は明確に区別する必要があろう。

3. 分布関数と成長関数

既報（内藤，1985）でも指摘したように，本報(13)式に示す標本最大値の漸近分布関数はGOMPERTZ関数と，さらに(22)，(30)式に示す標本最小値の漸近分布関数は拡張された一般化WEIBULL関数と，また(8)式に示す標本最大値の厳密分布関数はRICHARDS関数とそれぞれ本質的に一致する。これらの三つの関数は林学の研究分野でしばしば観察されるアロメトリー変換やベキ変換に対してその関数形を保存する性質を有しており（箕輪，1980；大隅，1977），今後の林分成長モデルの研究において重要な役割を果たすことが期待される。

ところである生育時間tにおける胸高直径xの分布においてその確率密度関数が(31)式で表現されるとすれば，胸高直径xの期待値$E\{x\}$は(32)式で与えられる。

$$y = f\{x\,;\, \theta_i(t),\ i=1,\ m\} \tag{31}$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = g(t) \tag{32}$$

ここに$\{\theta_i(t),\ i=1,\ m\}$は胸高直径$x$の分布関数のパラメータであり生育時間$t$の関数となる。(32)式は平均胸高直径の成長関数$g(t)$そのものとなり，ある個体の大きさの分布関数とその平均値の成長関数のあいだには常に(32)式に示す関係式が成立している。個体の大きさの分布とその平均値の成長を同時に扱った研究は鈴木(1979)，末田(SWEDA, 1972)，竹内・箕輪(1974)などに見られ，竹内らはある条件のもとにPOISSON分布や2項分布とMITSCHERLICH成長関数との対応，幾何分布と2重指数成長関数との対応について論じている。

RICHARDS, WEIBULL, GOMPERTZ関数はそれぞれ個体の大きさの分布関数あるいはその平均値の成長関数としてしばしば用いられているが，(32)式に示す関係を考慮した場合これらの関数がお互いにどのような対応関係となるか非常に興味のある問題であり，今後この問題についてさらに検討を加えていく予定である。

最後に，本報告を作成するにあたり論文審査者には漸近分布関数について貴重な示唆を，ニュージーランド林業試験場のO. GARCIA博士には貴重な助言と参考資料を，東京大学農学部の箕輪光博博士には暖かいはげましと助言をいただいた。記して厚く感謝する次第である。

引用文献

GUMBEL, E. J.：Statistics of extremes. 375pp, Columbia Univ. Press, New York, 1958

JOHNSON, N. L. and KOTZ, S.：Continuous univariate distributions-1. 300 pp, Houghton Mifflin Company, Boston, 1970

箕輪光博：モデル雑感. 林業統計研究会誌 **5**：37～40, 1980

内藤健司：システムの信頼性からみたWEIBULL関数とRICHARDS関数の比較. 日林誌 **67**：179～183, 1985

大隅眞一：RICHARDSの生長函数. 林業統計研究会誌 **2**：47～58, 1977

RICHARDS, F. J.：A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Bot. **10**：290～300, 1959

鈴木太七：森林経理学. 197 pp, 朝倉書店，東京，1979

SWEDA, T.：Even-aged forest growth after fire：A mathematical model. Master's thesis, 177pp, The Univ. of New Brunswick, Canada, 1972

竹内公男・箕輪光博：純出生過程としての直径分布の考察. 第84回日本林学会大会講演集，73～74，1974

竹内　啓：統計的推定の漸近理論. 196pp, 教育出版，東京，1974

(1987年4月20日受理)