

林分成長モデルに関する理論的研究

誌名	宇都宮大学農学部演習林報告 = Bulletin of the Utsunomiya University Forests
ISSN	02868733
著者名	内藤, 健司
発行元	宇都宮大学農学部
巻/号	28号
巻号補足	
掲載ページ	p. 1-95
発行年月	1992年3月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council
Secretariat



林分成長モデルに関する理論的研究

内藤 健司

Studies on Forest Growth Modeling^{※1}

Kenji NAITO^{※2}

目次

序章	2
第1章 極値統計学からみた林分成長関係	
1.1 はじめに	4
1.2 Gompertz関数, Weibull関数, Richards関数の起源	4
1.3 Weibull関数の拡張	5
1.4 システムの寿命分布	7
1.5 Fisher & Tippettによる極値分布の極限形の誘導	9
1.6 Gumbelによる標本極値の漸近分布関数の誘導	10
1.7 内藤による極値の漸近分布関数の誘導	11
1.8 Richards関数, Weibull関数, Gompertz関数と漸近分布関数	14
1.9 林分成長のシステム論的考察	15
第2章 林分密度管理とロジスティック理論	
2.1 はじめに	16
2.2 植物成長のロジスティック理論	16
2.3 Reineke式と3/2乗則, $v-n$ 線の比較	18
2.4 林学における林分密度管理図の展開とその問題点	19
第3章 Richards関数に基づく林分成長モデルと $w-N$ trajectory	
3.1 はじめに	23
3.2 Richards関数の型分類とその特徴	23
3.3 Richards関数に基づく林分成長モデル	31
3.4 減少型Richards関数と逆数式	33
3.5 $w-N$ trajectoryの曲線形と型分類	34
3.6 $w-N$ trajectoryの適用例	38

※1 Review article of the Dr. thesis, University of Tokyo.

※2 Department of Forest Science, Faculty of Agriculture, Utsunomiya University, Utsunomiya 321, Japan.

第4章	最多密度曲線	
4.1	はじめに	40
4.2	林分成長モデルの改良	40
4.3	$w-N$ trajectoryと只木の式	42
4.4	$w-N$ trajectoryと最多密度曲線	42
4.5	林分成長モデルのパラメータ推定法	43
第5章	$w-N$ 曲線	
5.1	はじめに	46
5.2	$w-N$ 曲線に関する既往の研究	46
5.3	$w-N$ 曲線式とその傾き	48
5.4	$w-N$ 曲線の曲線形	48
5.5	生育時間の経過に伴った $w-N$ 曲線の傾き	51
	終章	52
	引用文献	55
	Summary	59
	付表	62

序 章

本論文の目的はより広範な曲線群を表現できる拡張Weibull関数を提案し、成長関数または分布関数としてのWeibull, Richards, Gompertz関数の相互関係に関する理論的考察を極値統計学の立場から行うと共に、林分の成長機構を一つの多重システムとして考えることによってこれらの関数に成長関数あるいは分布関数としての生物学的意味付けを行い、さらにRichards関数に基づく簡単な林分成長モデルをとおして自己間引き曲線や最多密度曲線あるいは競争密度効果則などの林分成長に関するいくつかの経験的知識に対して理論的考察を行うことである。

第1章ではWeibull関数のパラメータに関する条件を吟味することによってWeibull関数をより一般的に拡張し、その特徴を明らかにする。次に、胸高直径や樹高等の分布関数として多く用いられているWeibull関数や、胸高直径、樹高、幹材積の成長関数として用いられているRichards, Gompertz関数の相互関係を標本における最大値あるいは最小値の分布という観点から明らかにす

ると共に、林分の成長機構を一つの多重構造システムとして捉えることによってこれらの関数に成長関数あるいは分布関数としての生物学的な意味付けを行う。

第2章では林分密度管理図の基礎となるロジスティック理論および林分密度管理図の展開過程を簡単に要約し、その展開過程に認められる自己間引き曲線や最多密度曲線等に関する理論上及び応用上の問題点を検討しながら本論文の中心的課題を明らかにする。

第3章では成長関数の中からRichards関数を基本的な成長関数として採用し、初めに増加型と減少型のRichards関数の特徴を解析する。次にRichards関数に基づいた一つの無間伐林分成長モデルを提案し、個体密度と平均個体重の時間方向の関係を表す $w-N$ trajectoryの一般式を誘導し、更にパラメータの符号に応じた $w-N$ trajectoryの曲線形の一般的特徴を分析する。

第4章では本モデルによる $w-N$ trajectoryの一般式が表す曲線の特徴を自己間引き現象に関す

る過去の知見と照らし合わせ、Richards関数のパラメータに関する条件を新たに追加することによって、第3章で提案された林分成長モデルを改良する。さらに、改良されたモデルの $w-N$ trajectoryと只木の式の比較をすると共に、この $w-N$ trajectoryが最多密度曲線の新しい解釈も含めて自己間引き現象を統一的に説明できるモデルの一つであることを明らかにする。

第5章では $w-N$ 曲線の一般式が表す曲線の特徴を競争密度効果に関する過去の知見と照らし合わせ、第4章で改良された林分成長モデルの有効性とその限界を明らかにし、終章では本論の全体のまとめと今後の課題提起を行う。

本研究を取りまとめるに当たり、貴重な助言、指導、資料の提供や励まし、校閲を頂いた東京大学農学部教授南雲秀次郎先生、同助教授箕輪光博先生をはじめ、論文の御校閲を頂いた東京大学農学部教授太田猛彦先生、同助教授八木久義先生、同助教授上村賢治先生に厚く御礼申し上げます。本論文の林分成長モデルに関する研究のきっかけは、著者が1982年度内地研究員として東京大学農学部林学科森林経理学研究室に十ヶ月滞在する間、箕輪先生を中心として毎週2回行われた「激ゼミ」をとおして与えられた。著者の内地留学を積極的に支援して頂いた宇都宮大学農学部教授藤原信先生を始め同林学科の教職員の皆様、また著者の内地留学を快く受け入れて下さり、同時に著者の恩師でもある東京大学農学部名誉教授平田種男先生、

さらに内地留学中パーソナルコンピュータの使い方やプログラム作成および数値計算などでお世話になった当時の大学院生、白石則彦氏（農林水産省森林総合研究所）と石橋整司氏（東京農工大学農学部）に心からの感謝を申し上げます。さらに内地留学後、自己間引き曲線と最多密度曲線に関する研究状況について私信をもって教えて頂いた信州大学理学部教授只木良也先生と岩手大学農学部教授安藤貴先生、また植物成長のロジスティック理論に関する貴重な資料と私信による貴重な助言を頂いた手塚山大学教授篠崎吉郎先生と京都大学農学部助教授大島誠一先生、並びに篠崎先生との知遇を得るチャンスを与えて頂いた農林水産省森林総合研究所千葉幸弘氏、また拡張ワイブル関数に関する論文の素稿に対して丁寧なコメントと資料を頂いたニュージーランド林業試験場のOscar Garcia博士並びに米国ジョージア大学教授Robert L. Bailey先生に厚く御礼申し上げます。最後に本研究で使用した資料の収集にあたり協力を頂いた宇都宮大学農学部附属演習林名誉教授故長田英雄先生並びに同教授松尾毅先生、同技官故斎藤秀吉氏、同技官植木広氏を始め演習林職員の方々と宇都宮大学農学部林学科林業経営研究室の卒業生の皆さん、古い文献の検索及び入手に協力を頂いた宇都宮大学総合図書館参考係藤岡寿枝女史を始め図書館職員の皆様に心からの感謝を申し上げます。なお、本論文は東京大学審査学位論文の全文である。

1 章 極値統計学からみた林分成長関数

1.1 はじめに

林学の研究分野、特に林分成長解析の研究においてはRichards関数を始め、Gompertz関数、Weibull関数、Mitcherlich関数、logistic関数等がしばしば胸高直径や樹高等の成長関数あるいは分布関数として用いられている。その理由としては、現実の測定資料を記述するに際しこれらの関数のパラメータに対して生物学的解釈が可能であるといったことや、これらの関数がデータの記述に際してそれなりの柔軟性を有することが挙げられよう。これらの関数の中からどの関数を林分成長解析に用いるかという問題は、研究者の林分成長現象に対する基本的考え方によるところが大きく、その研究者のセンスに左右されよう。

しかしながら、これらの関数はその起源において必ずしも植物の成長現象を記述するものとして提唱されたものではないにも拘らず、何故これらの関数が林分の成長解析にも有効に用いられ得るのかということは非常に興味深い問題である。本章では上記の関数の中でもRichards関数（以後R関数と省略）、Weibull関数（同W関数）、Gompertz関数（同G関数）の起源を最初に紹介し、次にW関数のパラメータに関する条件を拡張することによって一般化された拡張Weibull関数の特性を説明する。さらにFisherらやGumbelによる標本極値の分布関数の誘導法を紹介し、著者による簡単な標本極値の分布関数の誘導法を提案すると共に、G関数とW関数およびR関数の間の相互関係を極値統計学の観点から考察し、あわせて林分の成長現象を一つの多重システムとして捉えることによりこれらの関数に成長関数としての一つの生物学的意味付けを行う。

1.2 Gompertz関数, Weibull関数, Richards関数の起源

G関数、W関数、R関数のなかで一番早く提唱されたものはG関数である。Gompertz (1825) は人間の死亡法則と生命表の新しい計算方法に関する論文のなかで、生命表において年齢階の増加に伴う生存者数の減少がある法則に従って記述されることを例証している。Gompertzは人間の死因を大別して、その人の過去の生活経歴と無関係な

偶然によるものと、年齢に伴う老化現象（死に抗する能力の減退）によるものを考えた。年齢と無関係に感染する病があり、感染すれば患者の死に至る確率も年齢と無関係であるとするれば、その病による年齢階別死者数はその母集団の大きさに比例し、ある年に産まれた人口は時間の経過に伴って指数関数的に減少する。しかし年齢（老化）に伴って感染する病の種類や患者の死に至る確率が増加するならば、生命表における年齢階別生存者数は指数関数より早いスピードで減少するであろう。Gompertzは数種類の生命表を観察した結果、一定間隔でとられた年齢階毎の死亡率が等比数列的に増加するという知見（現在では「ゴンペルツの法則」と呼ばれている）を得、その知見（仮定）から次式に示す減少関数を導き、生命表の数値にこの式がよく当てはまることを確認した。

$$L_x = dg^{Q(x)}, \quad Q(x) = qx \quad (1.2.1)$$

ただし、 L_x はX年齢階の生存者数を表し、 d, g, q は定数である。

(1.2.1)式は適当な変換によって2重指数関数にも変換される減少関数で、現在Gompertz関数と呼ばれているが、Winsor (1932)の頃より減少関数としてばかりでなく増加関数としても用いられるようになったようである。日本の林学分野においては、箕輪 (1982, 1983a, 1983b, 1984) や白石 (1985) がG関数に基づいた林分成長の数学モデルを研究している。

一方Weibull (1951) は鉄輪が直列に連結された鎖の切れる確率を考えて一つの分布関数を提案したが、現在その分布関数の一般形は次式で表される。

$$W(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right\} \quad (1.2.2)$$

ただし、 $x \geq a, b > 0, c > 0$ で、 a, b, c はそれぞれ位置パラメータ、尺度パラメータ、形状パラメータと呼ばれる定数である。

Weibullはこの関数が材料の強度（信頼性）や動物個体の大きさの分布、成人男性の身長分布等、幅広い分布関数として応用できることを示した。現在この関数は金属腐食の深度分布としても用いられているが、寿命の極小値分布として信頼性の研究でも重要な関数として用いられている（依

田：1972)。この関数はパラメータ c のとる値によって幅広い分布関数を表現することが可能で現在では Weibull 関数と呼ばれている。西沢ら (1976) を始めとして林学分野での W 関数の応分例は数多くあるが、本来、部品の寿命分布や様々な個体サイズの空間分布関数として用いられてきた W 関数を林分成長要因の成長関数として応用する試みもなされている (Yangら：1978, 松村ら：1983)。

また、R 関数の起源は Bertalanffy の成長関数にある。動物個体重 W の成長を考える場合、Bertalanffy (1949) は動物個体による同化量と異化量の差が基本的にその個体の成長量となると考え、以下に示す微分方程式を与えた。ただし、 t は生育時間を表し、 η と κ は正の定数である。

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^m - \kappa W^n \quad (1.2.3)$$

この微分方程式を解析的に解くのは困難であるが、Bertalanffy は一般に動物の異化量は個体重に比例すると考えてパラメータ n を 1 と仮定し、次式に示す一般解を得た。

$$W = A(1 - Be^{-\kappa t})^{1/(1-m)} \quad (1.2.4)$$

ただし、 $A = (\eta/\kappa)^{1/(1-m)}$ 、 $B = 1 - (\kappa/\eta) W_0^{(1-m)}$ 、 $k = (1-m)\kappa$ 、 W_0 は初期個体重である。

Bertalanffy は Rubner の surface rule から (1.2.3) 式右辺第 1 項 (同化項) のべき乗部 m の値を $1 \geq m \geq 2/3$ と考え、動物の同化形態によって様々な成長関数が得られることを指摘した。

Richards (1959) は実用的な立場から m に関する Bertalanffy の制約を拡張し、 $m \geq 0$ と考えることによってこの関数が更に広範なタイプの成長曲線を表現できることを明らかにした。日本ではこの拡張解釈された Bertalanffy の成長曲線を大隅 (1977) が紹介して以来、多くの研究者が様々な林分成長要因に対してこの関数を適用しており、この成長関数は Richards (成長) 関数と呼ばれることが多い。R 関数の林学分野での応用については Pienaar ら (Pienaar *et al.* : 1973)、大隅 (1976)、吉田 (1979)、Garcia (1983)、内藤 (1983d)、伊藤 (1986)、阿部 (1989) らを始め多くの報告がなされているが、簡単に R 関数の特徴を説明しておく。

(1.2.4) 式に示す R 関数は $m=0$ のとき Mits-

cherich 関数と一致し、 $m=2$ のときは logistic 関数、 $m \rightarrow 1$ のときは G 関数と一致し、 m のとる値によってこれらの関数の中間タイプの曲線を表現することができると言われている。ただし、 $m=1$ の場合には (1.2.3) 式に示す微分方程式から明らかのようにその解は指数関数となる。

$m \rightarrow 1$ のとき R 関数が G 関数と一致することに関して、篠崎ら (1988) や上野ら (1988)、梅村 (1988) は指数関数になると批判し、内藤 (1988a) も Richards (1959) による G 関数の誘導法に疑問を投げかけている。しかし議論の分かれるところであるが、内藤 (1989) のように Bertalanffy の与えた微分方程式とその一般解を関連させて考えず、初めから一般解の形で R 関数を考えて m の値と関係なく初期値 W_0 の値がア priori に決まっていると考えるならば、R 関数は近似的に G 関数を表現できると考えられよう。

1.3 Weibull 関数の拡張

Bailey ら (1973) は W 関数を胸高直径の分布関数として使い、その適合性の良さやパラメータ推定法について論じている。W 分布関数の性質を論じるに際し、位置パラメータを 0 としても関数は一般性を失わないので、Bailey らは W 分布関数の一般形を次式で表現した。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x}{b} \right)^c \right\} \quad (1.3.1)$$

$$f(x) = \left(\frac{c}{b} \right) \left(\frac{x}{b} \right)^{c-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{b} \right)^c \right\} \quad (1.3.2)$$

ただし、 $F(x)$ と $f(x)$ はそれぞれ分布関数 (累積確率密度関数) と確率密度関数、 b と c はそれぞれ尺度と形状のパラメータであり、 $x \geq 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ である。その確率密度関数の曲線形は $1 > c > 0$ の場合逆 J 字型分布になり、 $c=1$ の場合は指数分布、 $3.6 > c > 1$ の場合は正の歪度をもった山型分布となる。とくに、 $c=2$ の場合を Rayleigh 分布という。さらに $c=3.6$ 付近では正規分布に近似し、 $c > 3.6$ の場合は負の歪度をもった山型分布となり、 $c \rightarrow \infty$ の場合は δ 関数に近似する。このように様々な形の分布曲線を表現できる W 関数の柔軟性は、現実の様々な資料を記述するに際し大きな応用の可能性を示すものであり、それ故多くの研究者によって注目されてきた。

一方、内藤 (1983c) は Bailey らが強調した W 関数のもつ分布曲線表現上の柔軟性の限界を指摘し、その限界を取り除くために (1.3.3) 式に示す W 関数のパラメータに関する制約条件を、 $b > 0$ 、 $c > 0$ 、 $x \geq a$ または $b < 0$ 、 $c < 0$ 、 $x \leq a$ と拡張した。

$$W(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right\} \quad (1.3.3)$$

内藤によって拡張された W 関数では、(1.2.2) 式や (1.3.1) 式に示す Weibull や Bailey らの W 関数と違って、パラメータ b と c は共に正 ($x \geq a$ の場合) または共に負 ($x \leq a$ の場合) の値をとることができる。(1.3.3) 式に示す W 関数の 1 次、2 次の導関数は次式で与えられ、

$$\frac{dW}{dx} = \left(\frac{c}{b} \right) \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right\} \quad (1.3.4)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{dW}{dx} \frac{1}{x-a} \left\{ c-1 - c \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right\}$$

(1.3.4) 式に示される確率密度関数が山形の曲線を表す場合 ($c > 1$ 、 $c < 0$)、そのモード x_f は次式で表される。

$$x_f = a + b \left(1 - \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (1.3.5)$$

従来の W 関数ではパラメータ b 、 c は共に正でパラメータ a は確率変数の下限値を表すものと考えられていた。一方、内藤の提案したようにパラメータ b と c が共に負と考えると $x-a \leq 0$ であれば、(1.3.4) 式に示す確率密度関数は非負でその総和は 1 となるので (1.3.3) 式は確率分布関数と考えられる。その場合確率変数 x には $x-a \leq 0$ という条件がつくのでパラメータ a は確率変数 x の上限値を表す。

(1.3.5) 式において b と c が共に正の場合、常に $x_f < a+b$ が成立し、 $c \rightarrow +\infty$ したとき $x_f \rightarrow a+b$ となる。 $W(a+b) = 1-1/e$ (e は自然対数の底) であるから分布関数 $W(x)$ の変曲点での確率は $1-1/e$ をこえることはできない。 $c > 3.6$ の場合の (1.3.2) 式は負の歪度をもった山型分布から一点に集中する棒状分布までの広範な分布形を表現できると Bailey らは指摘しているが、 $b > 0$ 、 $c > 0$ という条件下での分布関数 $W(x)$ は、上述のようにその変曲点での確率が $1-1/e$ をこえることができないという限界をもっている。然るに、(1.3.5) 式にお

いて b と c が共に負の場合、常に $x_f > a-|b|$ が成立し、 $c \rightarrow -\infty$ したとき $x_f \rightarrow a-|b|$ となる。したがって $W(a-|b|) = 1-1/e$ であるから、分布関数 $W(x)$ の変曲点での確率は常に $1-1/e$ をこえている。

従来の W 関数ではパラメータ b 、 c は共に正の定数で、確率変数には下限値しか存在せず、しかも確率分布関数の変曲点での確率は $1-1/e$ をこえることができないという限界があった。しかし内藤が提案した拡張された W 関数ではパラメータ b 、 c が同時に負値をとることも可能であり、そのときパラメータ a は確率変数の上限値となって、分布関数の変曲点での確率は常に $1-1/e$ をこえている。従来の W 関数もっていた性質と内藤によって拡張された部分の関係は、R 関数における Mitscherlich 族と logistic 族の曲線群の間の関係と類似しており、この内藤による提案は Richards (1959) による Bertalanffy (1949) の成長関数のパラメータの拡張解釈と一脈あい通じる面がある。その意味で内藤は新しく提案された関数を拡張 Weibull 関数と呼んでいる。なお、図-1.3.1.a にパラメータ $c (c > 0)$ のとる値に応じた従来の W 関数の曲線形を、図-1.3.1.b にパラメータ $c (c < 0)$ のとる値に応じた拡張 W 関数の曲線形を確率密度関数の形で示す。図-1.3.1.b より明かなように拡張 W 関数の曲線形は分布のモードが極端に右側へ偏った曲線を表すことができる。

さらに拡張 W 関数を胸高直径分布や樹高分布に適用した例をいくつか説明する。当てはめに用いた資料は宇都宮大学船生演習林の成長量標準地の毎木測定資料 (内藤：1982) と同演習林のヒノキ生長量試験地の 6 回にわたる定期測定資料 (内藤：1980, 1984c, 1988b) であり、その詳しい内容はそれぞれの測定記録報告書を参照されたい。W 関数のパラメータ推定の計算はデミングの最小二乗法 (Deming：1946) の考え方に基づいて行い、実際の計算は内藤 (1984d) のプログラムを用いてパーソナルコンピュータ PC-9801 (NEC) で行った。8 箇所の成長量標準地プロットの胸高直径分布と樹高分布資料に対して、(1.3.4) 式に示すワイブル型確率密度関数を当てはめて得られたパラメータの推定値一覧を表-1.3.1 に示す。表-1.3.1 においてプロット 6 の胸高直径と樹高およびプロット 5 の樹高の分布は、パラメータ b と c が共に負となる拡張 W 関数となっている。また 2 箇所のプロットからなるヒノキ生長量試験地の 6 回に

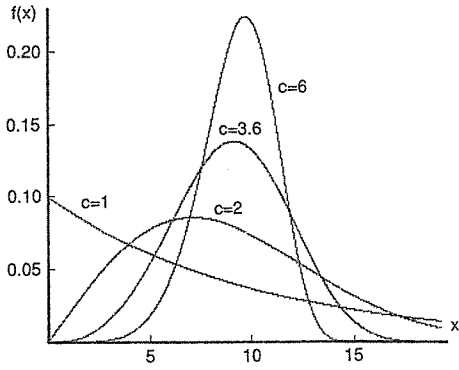


図-1.3.1.a 従来のWeibull確率密度関数 (a=0,b=10)

$$f(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right\}$$

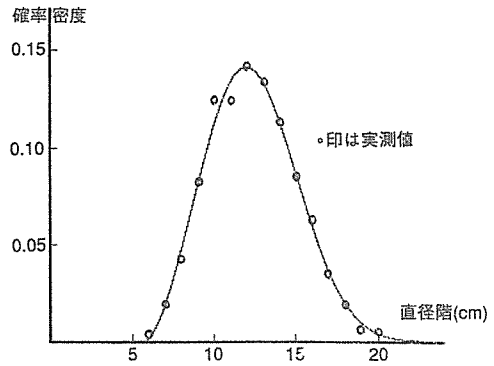


図-1.3.2 ヒノキ成長量試験地PLOT-1(1961)胸高直径分布

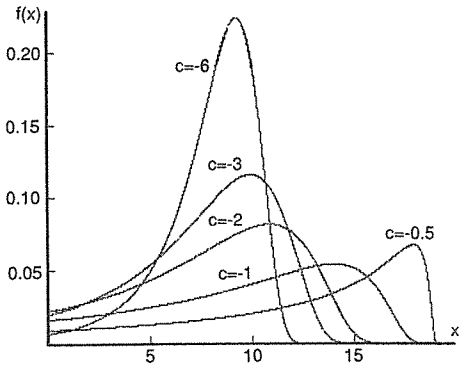


図-1.3.1.b 拡張のWeibull確率密度関数 (a=19,b=-10)

$$f(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right\}$$

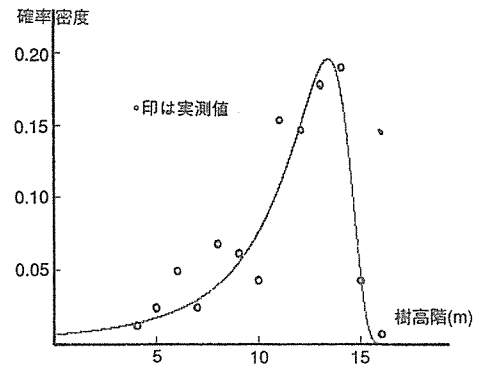


図-1.3.3 成長量標準地PLOT-6(1961)樹高分布

わたる定期測定資料の胸高直径分布と樹高分布資料に対して、(1.3.4)式に示す微分形のW関数を当てはめて得られたパラメータの推定値を一括して表-1.3.2に示す。表-1.3.2においてはすべてパラメータbとcが共に正となるW関数が当てはめられている。更に個々の胸高直径分布や樹高分布への当てはめ結果は、巻末の付表-1~40に示すとおりであり、その中から1961年測定のヒノキ成長量試験地PLOT-1の胸高直径分布と成長量標準地PLOT-6の樹高分布について、その実測値と当てはめられた分布曲線を図-1.3.2および図-1.3.3に示す。胸高直径の分布はモードが左側に多少偏って従来のW関数が当てはめられているのに対して、樹高分布のモードは極端に右側に偏って拡張W関数が当てはめられている。当てはめられた資料全

体の適合度は概ね良好であるが、いくつかの資料において確率変数の下限値を意味するパラメータaの推定値が負の値をとったり、実測値の最小値より大きくなる例が認められる。この原因は何らかの理由によって異質な資料が混入したためとも考えられるが、このような結果を避けるためにパラメータ推定に際しaの値を最小実測値以下あるいは最大実測値以上に最初から固定したり、実測値に重み付けをする方法が考えられる。しかし何れにしてもこれが最善の方法であるという際だった長所をもっているわけではない。

1.4 システムの寿命分布

いくつかの部品より構成されるシステムの故障という問題を考える場合、トータルなシステムと

表-1.3.1 成長量標準地の胸高直径と樹高分布に対する Weibull 関数のパラメータ推定値一覧表

プロット名	胸高直径分布			樹高分布		
	a	b	c	a	b	c
PLOT-1	8.13	10.7	3.00	6.87	10.1	7.95
PLOT-2	-5.54	20.8	8.44	5.69	6.93	5.95
PLOT-3	3.87	7.78	3.44	3.83	6.46	3.86
PLOT-4	7.29	12.5	2.92	9.17	6.99	4.11
PLOT-5	12.1	8.56	2.12	20.6	-3.65	-4.17
PLOT-6	43.7	-28.5	-6.65	17.5	-4.80	-2.35
PLOT-7	2.30	13.2	4.00	-3.39	15.5	8.76
PLOT-8	9.29	12.8	2.55	3.41	17.6	8.23

脚注： a 、 b 、 c はそれぞれ位置、尺度、形状パラメータである。

表-1.3.2 ヒノキ成長量標準地の胸高直径と樹高分布に対する Weibull 関数のパラメータ推定値一覧表

プロット名 測定年	胸高直径分布			樹高分布		
	a	b	c	a	b	c
PLOT-1						
1961	5.82	7.39	2.61	-1.15	12.3	10.1
1966	5.71	9.53	2.94	3.39	10.3	7.25
1971	7.19	9.70	2.60	6.27	9.07	6.39
1978	8.55	10.6	2.56	9.79	7.69	5.06
1982	8.94	11.6	2.47	12.9	6.38	4.45
1986	9.80	12.1	2.40	15.2	5.29	3.92
PLOT-2						
1961	3.45	8.49	3.56	4.23	5.09	3.09
1966	4.77	10.3	3.77	4.75	7.38	4.44
1971	5.41	11.6	3.65	8.08	5.97	3.60
1977	8.08	11.4	3.03	9.73	6.37	4.01
1982	8.30	12.6	2.97	11.6	6.14	3.73
1986	9.21	13.2	2.69	12.2	7.04	4.45

脚注： a 、 b 、 c はそれぞれ位置、尺度、形状パラメータである。

しての故障率あるいは生存率はそのシステムの構造と密接な関係をもっている。このようなシステムの信頼性に関する問題はシステム工学の分野で研究されてきているが、議論の展開に先だってこの研究分野における基本的用語の概念を依田(1972)に従って簡単にまとめる。

ある部品を使い始めてからそれが故障するまでの時間(寿命)を t で表し、寿命がちょうど t である確率密度関数を $f(t)$ 、寿命が t 以下である累積確率密度関数を $F(t)$ で表せば、寿命が t をこえる確率を意味する信頼度関数 $R(t)$ は次式で表現される。 $F(t)$ は不信度関数とも呼ばれている。

$$R(t) = 1 - F(t)$$

更に任意の時間における信頼度関数の減少率は故障率関数（または強度関数）と呼ばれており，故障率関数 $h(t)$ とその部品の平均寿命 $E(t)$ はそれぞれ次式で定義される。

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{-dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} \quad (1.4.1)$$

$$E(t) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot t dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

ところで n 個の部品から構成されるシステムを考え，システムとしての寿命が t をこえる確率を $R_s(t)$ ， t 以下である確率を $F_s(t)$ で表すことにする。

n 個の部品が直列に配置され，その中の一つの部品が故障してもシステムとしての機能が失われる直列システムの場合，システムとしての寿命は n 個の部品のうちで最小の寿命をもつ部品に依存する。ここでシステムを構成するすべての部品の信頼度関数が同一の関数 $R(t)$ で表現されるものとすれば，システムとしての信頼度関数 $R_s(t)$ は個々の部品の寿命が t をこえる確率の積で与えられ， $R_s(t)$ と $F_s(t)$ はそれぞれ次式で表現される。

$$R_s(t) = \text{Prob.}\{t_{\min} > t; n, F\} = \{1 - F(t)\}^n$$

$$F_s(t) = \text{Prob.}\{t_{\min} \leq t; n, F\} = 1 - \{1 - F(t)\}^n$$

今度は反対に n の部品が並列に配置され，全部の部品が故障しない限りシステムとしての機能が失われない並列システムの場合，システムとしての寿命は n 個の部品の内で最大の寿命をもつ部品によって左右される。直列システムの場合と同様に n 個の部品が同一の信頼度関数 $R_s(t)$ をもつと仮定すれば，システムとしての不信頼度関数 $F_s(t)$ は個々の部品の寿命が t 以下である確率の積で表現され， $R_s(t)$ と $F_s(t)$ はそれぞれ次式で表現される。

$$R_s(t) = \text{Prob.}\{t_{\max} > t; n, F\} = 1 - F(t)^n$$

$$F_s(t) = \text{Prob.}\{t_{\max} \leq t; n, F\} = F(t)^n$$

結局システムとしての寿命（信頼性）はシステム構造の違いによって異なり，システムを構成する部品の最小寿命あるいは最大寿命に依存している。さらに，直列システムと並列システム（標本最小値と標本最大値）との間では，一方の $R_s(t)$ ， $F_s(t)$ ， $F(t)$ をそれぞれ $1 - R_s(t)$ ， $1 - F_s(t)$ ， $1 - F(t)$ で置き換えれば他方の $R_s(t)$ ， $F_s(t)$ が求められる。このように最小値の分布と最大値の分布との間には双対性が成立しており，最小値か最大値のうち一方の分布関数が求まれば他方の分布関数も双対性を利用して求められる。

1.5 Fisher & Tippettによる極値分布の極限形の誘導

前節で述べたように，システムを構成するすべての部品の信頼度関数が同一であるという仮定をおけば，システムの信頼性の問題は同一の母集団から抽出されたサイズ n の標本における最大値あるいは最小値の分布問題として考えられる。このような研究は統計学の中で極値統計学と呼ばれ，Gumbel (1958) によるとその起源は古く，交通手段や農業用水として利用されていた河川の洪水の研究まで遡ることができ，生命保険における人間の寿命や金属の疲労，機械の強度等の研究と深く関連しており，多くの研究者によってこの問題は研究されている。

Fisherら (1928) はある仮定のもとに標本最大値の分布関数に関する関数方程式を導き，その方程式から3種類の解を得た。その概要を要約すれば以下に述べるとおりである。

同じ母集団から抽出された，サイズがそれぞれ m の標本を n 個考える。 n 個の標本にはそれぞれ一つの最大値があり， n 個の標本最大値の中の最大値は，全体をひとまとめにした mn 個の観測値中の最大値と一致する。従ってサイズ m の標本における標本最大値の分布関数を $P(x)$ とすれば，同じ母集団からのサイズ mn の標本における最大値の分布関数は $P(x)^n$ と表現される。

ここで標本のサイズ m を充分大きくしたとき $P(x)$ の極限形が存在するものと仮定すれば， $P(x)$ と $P(x)^n$ はお互いに類似した関数形となるはずであるから，次式に示す関数方程式が導かれる。

$$P(x)^n = P(a_n x + b_n) \quad (1.5.1)$$

ただし、 a_n と b_n は n によって決まる定数である。Fisherらはこの方程式の解として以下に示す分布関数の極限形を得た。

① $a_n=1$ の場合

$$P(x)=\exp\{-\exp(-x)\} \quad (1.5.2)$$

② $a_n \neq 1$, $P(0)=0$, $(b_n=0, x \geq 0)$ の場合

$$P(x)=\exp(-x^k), \quad (k > 0) \quad (1.5.3)$$

③ $a_n \neq 1$, $P(0)=1$, $(b_n=0, x < 0)$ の場合

$$P(x)=\exp\{-(-x)^k\}, \quad (k > 0) \quad (1.5.4)$$

(1.5.2) 式に示される解は2重指数関数であり、(1.2.1) 式のGompertz関数と本質的に同一のものである。Fisherらの論文では(1.5.1) 式に示される関数方程式を解く過程の説明が簡単に述べられているだけで、その内容を一読して理解することは困難であるが、その過程の詳しい説明はGumbel (1958) の著書に見られるので参照されたい。

さらに、Fisherら(1928)の論文名は標本最大値と標本最小値の分布関数の極限形に関するものであったが、実際は標本最大値の分布関数を示すのみで標本最小値の分布関数について何も言及していない。標本最大値と標本最小値の間には第1章4節で指摘した双対性が認められるので、一方の分布関数を導くだけで充分とFisherらは判断したものと思われる。

1.6 Gumbelによる標本極値の漸近分関数の誘導

Gumbel (1958) はFisherらとは異なる方法で表-1.6.1に示すような標本極値の分布関数を求めている。Gumbelによる標本極値の漸近分布関数の誘導では対称原理 (symmetry principle) と特性極値 (characteristic extremes) という概念が重要な役割を果たしているため、初めにこれらの説明を簡単に行う。

2つの分布関数 $F(x)$ と $G(x)$ の間に次式に示す関係が成立するときこの2つの関数は対称であると言われる。

$$F(-x)=1-G(x), \quad \frac{dF(-x)}{dx} = \frac{dG(x)}{dx} \quad (1.6.1)$$

一方、 $F(x)$ を分布関数としてもつ母集団からの、サイズ n の標本における標本最大値 x_{max} と標本最小値 x_{min} の分布関数はそれぞれ次式で表される。

$$\text{Prob.}\{x_{max} \leq x; n, F\} = F(x)^n \quad (1.6.2)$$

$$\text{Prob.}\{x_{min} \leq x; n, F\} = 1 - \{1 - F(x)\}^n \quad (1.6.3)$$

また $F(x)$ と対称な分布関数をもつ母集団からのサイズ n の標本における極値の分布は上式の $F(x)$ を $G(x)$ で置き換えて求められる。(1.6.1) 式に示す $F(x)$ と $G(x)$ の間の対称性と第1章4節で述べた標本最大値と標本最小値の間の双対性を考慮すれば、お互いに対称な関数 $F(x)$ と $G(x)$ をそれぞれの分布関数としてもつ2つの母集団からの標本最大値と標本最小値の分布関数の間には(1.6.1) 式～(1.6.3) 式から次のような関係が常に成立し、一方の関数が求まれば他方の関数もこの関係式を利用して簡単に求められる。

$$\begin{aligned} \text{Prob.}\{x_{min} \leq x; n, G\} &= 1 - \{1 - G(x)\}^n \\ &= 1 - F^n(-x) \\ &= 1 - \text{Prob.}\{x_{max} \leq -x; n, F\} \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Gumbelは(1.6.4) 式に示す関係を対称原理と呼んでいる。

また、 $F(x)$ を分布関数とする母集団からの、サイズ n ($n \geq 2$) の標本においては、 $n \{1 - F(x)\}$ 個の観測値が x の値より大きいことが期待される。そしてその期待値が1あるいは $n-1$ となるような x の値をそれぞれ特性最大値 u_n 、特性最小値 u_1 とGumbelは呼んでいる。

$$nF(u_n) = n-1, \quad nF(u_1) = 1$$

お互いに対称な分布関数の特性最大値と特性最小値は符号が異なるだけでその絶対値は等しい。さらにGumbelは特性極値における強度関数を極値強度関数 (α_n または α_1) と呼んでいるが、それらは次式で与えられる。

$$\alpha_n = \frac{F'(u_n)}{1-F(u_n)} = nF'(u_n)$$

$$\alpha_1 = \frac{F'(u_1)}{1-F(u_1)} = \frac{n}{n-1} F'(u_1)$$

表-1.6.1 標本極値の漸近分布関数

(1) 母集団の分布が指数タイプの場合	
分布関数	$F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x\}$
標本最大値	$\Phi_{n_1}(x) = \exp[-\exp\{-\alpha_n(x - u_n)\}]$
標本最小値	${}_1\Phi_{n_1}(x) = 1 - \exp[-\exp\{\alpha_1(x - u_1)\}]$
備考	$\alpha_1 = \alpha_n, u_1 = -u_n$
(2) 母集団の分布が Pateto タイプの場合	
分布関数	$F(x) = 1 - (x - \varepsilon)^{-k}$
標本最大値	$\Phi_{n_2}(x) = \exp[-\{(u_n - \varepsilon)/(x - \varepsilon)\}^{k_1}]$
標本最小値	${}_1\Phi_{n_2}(x) = 1 - \exp[-\{(\omega - u_1)/(\omega - x)\}^{k_1}]$
備考	$u_1 = -u_n, k_1 = k_n, \omega = -\varepsilon$
(3) 母集団の分布が有限タイプの場合	
分布関数	$F(x) = 1 - (\omega - x)^k$
標本最大値	$\Phi_{n_3}(x) = \exp[-\{(\omega - x)/(\omega - u_n)\}^{k_1}]$
標本最小値	${}_1\Phi_{n_3}(x) = 1 - \exp[-\{(x - \varepsilon)/(u_1 - \varepsilon)\}^{k_1}]$
備考	$u_1 = -u_n, k_1 = k_n, \omega = -\varepsilon$

Gumbelの漸近分布関数の誘導ではこれらの特性最大値と極値強度関数が巧みに用いられている。母集団の分布関数として (1.6.5) 式に示す指数タイプの関数を仮定した場合を例にとってGumbelの誘導法を簡単に説明する。

$$F(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \tag{1.6.5}$$

初めにGumbelは母集団の分布関数 $F(x)$ を特性最大値 u_n のまわりで展開する。

$$\begin{aligned} F(x) &= F(u_n) + (x - u_n)F'(u_n) \\ &\quad + (x - u_n)^2 F''(u_n) + \dots \\ &\quad + (x - u_n)^v F^{(v)}(u_n) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{n} \left\{ 1 - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{nF^{(v)}(u_n)(x - u_n)^v}{v!} \right\} \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

逐次導関数 $F^{(v)}(u_n)$ を計算するためにL'Hopitalの定理を用いると、極値強度関数の定義から

$$nF^{(v)}(u_n) = (-1)^{v+1} \alpha_n^v, (v \geq 1) \tag{1.6.7}$$

となり、(1.6.6) 式と (1.6.7) 式より $F(x)$ は次式で近似される。

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \frac{1}{n} \left\{ 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(x - u_n)^v}{v!} (-1)^v \alpha_n^v \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \exp\{-\alpha_n(x - u_n)\} \end{aligned}$$

従って標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_{n_1}(x)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_{n_1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(x)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{n} \exp\{-\alpha_n(x - u_n)\}]^n \\ &= \exp[-\exp\{-\alpha_n(x - u_n)\}] \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

と求められる。

一方、 $F(x)$ と対称な分布関数をもつ母集団からの標本最小値の漸近分布関数 ${}_1\Phi(x)_{n_1}$ は対称原理によって次式のように求められる。

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_{n_1}(x) &= 1 - \exp[-\exp\{-\alpha_n(x - u_n)\}] \\ &= 1 - \exp[-\exp\{\alpha_1(x - u_1)\}] \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Gumbelの極値の漸近分布関数の誘導に対して内藤(1988a)はより簡単な誘導法を提案したが、その誘導法を次節に述べる。

1.7 内藤による極値の漸近分布関数の誘導

Gumbelは漸近分布関数を誘導するに際して特性最大値と極値強度関数を巧みに利用したが、内藤(1988 a)は母集団の分布関数に新しくパラメータ B を導入した。このパラメータの意味については後で考察するが、以下の論旨展開では次に示す対数関数と指数関数に関する公式を利用する。

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n} = \ln x \quad (1.7.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\{x\} \quad (1.7.2)$$

(1) 母集団の分布関数が指数タイプの場合

母集団の分布関数 $F(x)$ に (1.7.3) 式のような指数タイプの関数を仮定すると、この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は (1.7.4) 式で表現される。

$$F(x) = 1 - B \exp(-\alpha x) \quad (1.7.3)$$

$$M_n(x) = F(x)^n = \{1 - B \exp(-\alpha x)\}^n \quad (1.7.4)$$

ただし、 $\alpha > 0$, $1 > B > 0$, $x > (1/\alpha) \ln B$ である。(1.7.4) 式に示す厳密分布関数 $M_n(x)$ において x を 0 とおいて変形すると次式を得る。

$$-nB = \frac{M_n^{1/n}(0) - 1}{1/n} \quad (1.7.5)$$

(1.7.5) 式において非常に大きな値 N を考え、 $n \rightarrow N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_n(x)$ で近似されるとすれば、(1.7.1) 式に示す対数関数に関する公式により次式が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow N} (-nB) = \ln \Phi_n(0) \quad (1.7.6)$$

一方、(1.7.4) 式に示される標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は次式のように変形され、

$$M_n(x) = \{1 + (-nB) \exp(-\alpha x/n)\}^n \quad (1.7.7)$$

(1.7.7) 式において $n \rightarrow N$ ($N \gg 0$) としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n(x)$ は、(1.7.2) 式と (1.7.6) 式を利用して次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \lim_{n \rightarrow N} M_n(x) \\ &= \exp\{\ln \Phi_n(0)\} \{\exp(-\alpha x)\} \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

$1 > \Phi_n(0) > 0$ であるから $|\ln \Phi_n(0)| = \exp(-\alpha c_{n1})$ とおけば、(1.7.8) 式は次のように変形される。

$$\Phi_n(x) = \exp[-\exp\{-\alpha(x - c_{n1})\}] \quad (1.7.9)$$

更に $F(x)$ と対称な分布関数をもつ母集団を考えると、そこからの標本における最小値の漸近分布関数 $\Phi_n(x)$ は対称原理によって (1.7.9) 式から次のように求められる。

$$\Phi_n(x) = 1 - \exp[-\exp\{\alpha(x - c_{n1})\}] \quad (1.7.10)$$

(2) 母集団の分布関数が Pareto タイプの場合

母集団の分布関数 $F(x)$ として (1.7.11) 式のような Pareto タイプの関数を仮定すると、この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ (1.7.12) 式で表される。

$$F(x) = 1 - B(x - \varepsilon)^{-k} \quad (1.7.11)$$

$$M_n(x) = \{1 - B(x - \varepsilon)^{-k}\}^n \quad (1.7.12)$$

ただし、 $k > 0$, $1 > B > 0$, $x \geq B^{1/k} + \varepsilon$, ε は定数である。

(1.7.12) 式に示す厳密分布関数 $M_n(x)$ において、 x を $\varepsilon + 1$ とおいて変形すると次式を得る。

$$-nB = \frac{M_n^{1/n}(\varepsilon + 1) - 1}{1/n} \quad (1.7.13)$$

(1.7.13) 式において非常に大きな値 N を考え、 $n \rightarrow N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_n(x)$ で近似されるとすれば、(1.7.1) 式に示す対数関数に関する公式により次式が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow N} (-nB) = \ln \Phi_n(\varepsilon + 1) \quad (1.7.14)$$

一方、(1.7.12) 式に示される標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は次式のように変形され、

$$M_n(x) = \{1 + (-nB)(x - \varepsilon)^{-k/n}\}^n \quad (1.7.15)$$

(1.7.15) 式で $n \rightarrow N$ ($N \gg 0$) としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_n(x)$ は、(1.7.2) 式と (1.7.

14) 式を利用して次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \Phi_{n_2}(x) &= \lim_{n \rightarrow N} M_n(x) \\ &= \exp\{(x-\varepsilon)^k \ln \Phi_{n_2}(\varepsilon+1)\} \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

$1 > \Phi_{n_2}(0) > 0$ であるから $|\ln \Phi_{n_2}(\varepsilon+1)| = c_{n_2}^k$ とおけば、(1.7.16) 式は次のように変形される。

$$\Phi_{n_2}(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-\varepsilon}{c_{n_2}}\right)^k\right\} \quad (1.7.17)$$

更に $F(x)$ と対称な分布関数をもつ母集団を考えると、そこからの標本における最小値の漸近分布関数 $\Phi_{n_2}(x)$ は対称原理によって (1.7.17) 式から次のように求められる。

$${}_1\Phi_{n_2}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x+\varepsilon}{-c_{n_2}}\right)^k\right\} \quad (1.7.18)$$

ただし $x \leq -\varepsilon, c_{n_2} > 0$ である。

(3) 母集団の分布関数が有限タイプの場合

母集団の分布関数 $F(x)$ に (1.7.19) 式のような有限タイプの関数を仮定すると、この母集団からのサイズ n の標本における標本最大値の厳密分布関数 $M_n(x)$ は (1.7.20) 式のように表される。

$$F(x) = 1 - B(\omega - x)^k \quad (1.7.19)$$

$$M_n(x) = \{1 - B(\omega - x)^k\}^n \quad (1.7.20)$$

ただし、 $k > 0, 1 > B > 0, \omega \geq x \geq \omega - B^{1/k}$ 、 ω は定数である。

(1.7.20) 式に示される厳密分布関数 $M_n(x)$ において x を $\omega - 1$ とおいて変形すると次式を得る。

$$-nB = \frac{M_n^{\frac{1}{n}}(\omega-1) - 1}{1/n} \quad (1.7.21)$$

(1.7.21) 式において非常に大きな値 N を考え、 $n \rightarrow N$ としたとき $M_n(x)$ が $\Phi_{n_3}(x)$ で近似されるとすれば、(1.7.1) 式に示す対数関数に関する公式により次式が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow N} (-nB) = \ln \Phi_{n_3}(\omega-1) \quad (1.7.22)$$

一方、(1.7.20) 式に示される標本最大値の厳密分

布関数 $M_n(x)$ は次式のように変形され、

$$M_n(x) = \{1 + (-nB)(\omega - x)^k / n\}^n \quad (1.7.23)$$

(1.7.23) 式で $n \rightarrow N (N \gg 0)$ としたときの標本最大値の漸近分布関数 $\Phi_{n_3}(x)$ は、(1.7.2) 式と (1.7.22) 式を利用して次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \Phi_{n_3}(x) &= \lim_{n \rightarrow N} M_n(x) \\ &= \exp\{(\omega - x)^k \ln \Phi_{n_3}(\omega - 1)\} \end{aligned} \quad (1.7.24)$$

$1 > \Phi_{n_3}(0) > 0$ であるから $|\ln \Phi_{n_3}(\omega - 1)| = c_{n_3}^{-k}$ とおけば、(1.7.24) 式は次のように変形される。

$$\Phi_{n_3}(x) = \exp\left\{-\left(\frac{\omega - x}{c_{n_3}}\right)^k\right\} \quad (1.7.25)$$

さらに $F(x)$ と対称な分布関数をもつ母集団を考えると、そこからの標本における最小値の漸近分布関数 $\Phi_{n_3}(x)$ は対称原理によって (1.7.25) 式から次のように求められる。ただし $x \geq -\omega, c_{n_3} > 0$ である。

$${}_1\Phi_{n_3}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x + \omega}{c_{n_3}}\right)^k\right\} \quad (1.7.26)$$

本節で述べた内藤による標本極値の漸近分布関数の誘導法と前節で説明した Gumbel による誘導法を、母集団の分布関数に指数タイプの関数を仮定した場合を例に比較検討する。指数タイプの分布関数及び Gumbel と内藤によって導かれた標本最大値の漸近分布関数を再掲すると以下のとおりである。

$$F(x) = 1 - B \exp(-\alpha x) \quad (1.7.3)$$

$$\Phi_{n_1}(x) = \exp[-\exp\{-\alpha_n(x - u_n)\}] \quad (\text{Gumbel}) \quad (1.6.8)$$

$$\Phi_{n_1}(x) = \exp[-\exp\{-\alpha(x - c_{n_1})\}] \quad (\text{内藤}) \quad (1.7.9)$$

ここに、 u_n と α_n はそれぞれ特性最大値と特性最大値における強度関数であり、 α と B は母集団の分布関数にかかわるパラメータ (ただし Gumbel の場合 $B=1$)、 c_{n_1} は正の定数で $\exp\{\alpha c_{n_1}\} = |\ln \Phi_{n_1}(0)|$ なる条件式を満足する。

Gumbelの場合、 $F(x)$ の強度関数を μ で表すことにすれば (1.4.1) 式より

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{F'(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{\alpha B \exp(-\alpha x)}{B \exp(-\alpha x)} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

となり、 x の値と無関係に強度関数は常に α となるので特性最大値 α_n も α と等しい。また特性最大値 u_n は $nF(u_n) = n-1$ で定義されるから (1.7.3) 式から次式のように計算される。

$$u_n = \frac{1}{\alpha} \ln nB$$

一方、内藤の場合(1.7.6)式に示すように $\lim_{n \rightarrow \infty} (-nB) = \ln \Phi_{n_1}(0)$ であるから、 c_{n_1} は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}c_{n_1} &= \frac{1}{\alpha} \ln |\ln \Phi_{n_1}(0)| \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln nB\end{aligned}$$

以上のことからGumbelの誘導した標本最大値の漸近分布関数に含まれるパラメータ α_n と u_n は、内藤の誘導した標本最大値の漸近分布関数の対応するパラメータ α と c_{n_1} に等しいことが明らかになった。

また、前節で述べたようにGumbelは母集団の分布関数をその特性最大値のまわりで展開し、次にL'Hopitalの定理を用いて逐次導関数を極値強度関数で表現した上で指数関数の公式を利用して漸近分布関数を導いた。それに対して内藤は母集団の分布関数に新しくパラメータ B をもちこみ、対数関数と指数関数に関する公式を用いて漸近分布関数を誘導したが、Gumbelの方法と比較して内藤の方法はより簡明である。内藤がもちこんだパラメータ B は、母集団の分布関数が指数タイプの場合是一种の位置パラメータとして、Paretoタイプと有限タイプの場合是一种の尺度パラメータとして理解できる。

1.8 Richards関数, Weibull関数, Gompertz関数と漸近分布関数

内藤 (1985) は極値統計学の観点からG関数、拡張W関数、R関数の間の相互関係を検討し興味深い関係を指摘した。

表-1.6.1に示したようにGumbelは標本最小値の漸近分布関数として3つの関数を導いたが、その中で母集団の分布関数がそれぞれParetoタイプや有限タイプと対称な場合の関数を以下に示す。

$$\text{Prob.} \left\{ x_{\min} \leq x; x \geq \varepsilon \right\} = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x - \varepsilon}{u_1 - \varepsilon} \right)^{k_1} \right\} \quad (1.8.1)$$

$$\text{Prob.} \left\{ x_{\min} \leq x; x \leq \omega \right\} = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\omega - u_1}{\omega - x} \right)^{k_1} \right\} \quad (1.8.2)$$

(1.8.1)式においてそれぞれ ε を a 、 $u_1 - \varepsilon$ を b 、 k_1 を c で置き換えると標本最小値の漸近分布関数は、(1.3.3)式に示すパラメータ b 、 c がともに正である場合の拡張W関数に一致する。また(1.8.2)式においてそれぞれ ω を a 、 $\omega - u_1$ を $-b$ 、 k_1 を $-c$ で置き換えるとそれもまた(1.3.3)式に示すパラメータ b 、 c が負である場合の拡張W関数に一致する。

また、指数タイプの分布関数をもつ母集団からの標本最大値の厳密分布関数を表す(1.7.4)式は、(1.2.4)式において $A=1$ 、 $B=1$ 、 $k=\alpha$ 、 $1/(1-m)=n$ とした場合のR関数に一致し、FisherらやGumbelが標本最大値の分布関数の極限形あるいは漸近形として導いた(1.5.2)式と(1.6.8)式に示される2重指数型の関数は本質的にG関数と一致する。

既に述べたようにG関数、W関数、R関数はそれぞれ独自に提案されたものであり、これらの関数の間の相互関係については明らかにされていなかった。しかし極値統計学という観点からこれらの関数の相互関係を検討した結果、W関数は標本最小値の漸近分布関数の一つとして、またG関数は標本最大値の漸近分布関数の一つとして、更にR関数は標本最大値の厳密分布関数の一つとしても導けることが明らかとなった。

ところで標本のサイズ n が無限大となる場合の「標本極値の分布関数」を記述するに際し、Fisherら(1928)は「limiting form of the frequency distribution」という表現を用い、Gumbel(1958)

は「asymptotic distribution」という表現を用いている。標本を抽出する(無限)母集団の分布関数にどのような関数 $F(x)$ を想定しても、 $F(x)$ は標本サイズ n とは無関係で1と0の間の値をとる。従って、Jonsonら(1970)が指摘するように厳密な意味で $n \rightarrow \infty$ としたときの標本最大値の極限分布関数 $\Phi_n(x)$ は

$$\Phi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x)^n = 1 \quad (F(x) = 1 \text{ の場合})$$

$$\text{or } 0 \quad (F(x) < 1 \text{ の場合})$$

となって1または0に収束し、余り意味のない関数になってしまう。

しかしこの場合は「 n を無限大にする」というよりも「 n が非常に大きな値をとれば」という意味に理解するべきであろうし、極限形あるいは漸近形という言葉は近似形と理解するべきであろう。

漸近分布という表現は竹内(1974)の著書にも見られるが、岩波数学辞典(日本数学会編:1971)には見られない。一方、極限分布は「確率変数列に対しその分布の列が分布 F に収束するとき、 F をその確率変数列の極限分布(limit distribution)という」と岩波数学辞典では定義されている。本論で用いる「漸近分布」のパラメータには標本サイズ n に係わるパラメータが含まれるが、厳密な意味での「極限分布」のパラメータは n と無関係である。

1.9 林分成長のシステム論的考察

第1章2節で述べたようにG関数、W関数、R関数はその起源において異なる事象を記述するために提案されたにもかかわらず、林分成長解析の研究分野においては胸高直径や樹高、胸高断面積、幹材積、個体密度等の分布関数や成長関数として多くの研究者によって用いられている。どの関数を用いるかは研究者によってまちまちであるが、これらの関数に含まれるパラメータに生物学的な意味付けが可能であることや、現実に観測される種々の測定資料に対する適合性が良いこと、数学的変換に対してその関数形が保存されること等がこれらの関数の特徴である。しかしながら前節で指摘したように、極値統計学という観点からみるとこれらの関数は標本極値の分布関数という共通性が認められる。しかも林分成長の測定資料に対

してこれらの関数がよく適合するということは、個体の大きさの空間分布や個体の成長量の時間分布を含めた林木の成長現象を、標本最大値あるいは標本最小値の空間分布あるいは時間分布として捉えられることを暗示するものである(内藤:1985)。

事実、生物学においてはリービッチの最小律(最小量の法則)と呼ばれる知見があり、植物の生産量は生育に必要な諸要因の中で供給割合の最小な要因に支配されるという考え方がある。各成長要因に期待される、一定期間後の成長に対する貢献度が同一の分布関数で表現されると仮定すれば、個体の成長量の空間分布は標本最小値の分布として考えられる。

また、植物には本来最終的な大きさまで成長する可能性が与えられているが、その可能性は初め何らかの方法で多重にロックされており、時間の経過に伴ってロックが壊れることによって成長が実現していくと考えれば、植物成長の時間分布はロックの寿命の分布関数として表現される。

ロックの寿命分布はロックの構造によって異なる。一つのロックが多くのユニットから構成され、すべてのユニットが故障しない限りロックの機能が保証される(並列システム)ならば、その植物の成長はロックを構成するユニットの最大寿命の分布として考えられる。反対にロックを構成しているユニットが一つでも故障するとロックの機能が保証されなくなる(直列システム)ならば、植物の成長はロックを構成するユニットの最小寿命の分布として考えられる。

現実問題として林木の成長には相互作用が存在し、どの林木も周囲の林木の成長と独立した成長は考えられない。従ってロックと成長の例で言えば、ロックを構成するすべてのユニットの寿命分布が同一の分布関数で表現されるという仮定は非現実的であろう。個々のユニットの寿命分布が周囲の生育環境の変化に伴って微妙に変化するならば、現実の成長は上述のような理論的に考えられる成長から微妙にずれてくるであろう。

しかしながら植物の成長現象を一つの単純化されたシステムとして抽象的に考えるならば、極値統計学の立場から標本最大値あるいは標本最小値の分布関数としても導かれるG関数、W関数、R関数には、林分成長解析の手段として用いられる一つの根拠があると考えられよう。

2章 林分密度管理とロジスティック理論

2.1 はじめに

林分の最適な立木密度管理を求めて、胸高直径や胸高断面積、幹材積等の林分構成要因と立木密度との関係は多くの研究者によって究明されてきている。

寺崎 (1915) は地理的分布や植栽密度並びに苗木養成法の異なるスギ林分の生長と収穫を林齢あるいは材積並びに材積計算諸因子相互の関係から比較検討して全国単一なる収穫表を作成した。寺崎は材積並びに材積計算諸因子の成長曲線が一般に $Y = A \exp(-B/t)$ なる指数関数で表現され、従ってこれらの因子間には相対成長則が認められることを指摘し、これらの関係式を収穫表の作成に利用している。また吉田 (1928) は単木及び林分の樹高、胸高直径、幹材積等の成長曲線に吉田式と呼ばれる有理分数関数を適用し、これらの成長曲線式から林齢を消去して樹高、胸高直径、幹材積等の成長量間に認められる相互関係を論じた。さらにReineke (1933) は林分密度の適切な表示方法を求めて自然に観察される様々な樹種の林分資料を解析し、所与の平均胸高断面積直径に対する最大立木本数の式 (Reineke式と呼ばれる) が両対数グラフにおいて一定の傾きをもつ直線となることを見だし、S.D. I (stand density index) と呼ばれる指数を提案した。寺崎や吉田は各種要因に共通な関数形の成長曲線を仮定し、それらの相互関係を個体 (林分) 内の相対成長あるいは軌跡 (trajectory) という観点から研究したものであり、またReinekeは林分単位での平均胸高断面積直径と密度の相互関係を林分間の相対成長という観点から研究したものである。

しかし各要因の成長曲線と林分間の相互関係を同時に取り扱った、しかも生態学的解釈も可能な体系的研究としては大阪市大グループによる一連の研究が最初のものであろう。第2章では吉良、篠崎を始めとした大阪市大グループによる一連の研究 (ロジスティック理論) を簡単にまとめ、同時にロジスティック理論が林学の密度管理理論にどのような過程を経て応用されてきたかを総括し、あわせてロジスティック理論の応用上の問題点についての考察を行う。

2.2 植物成長のロジスティック理論

1953年以来、吉良や篠崎を中心とする大阪市立大学の研究グループは「高等植物の種内競争」をテーマとする一連の論文を発表し、密度と個体の成長の関係を説明するモデルを提案した。その基礎となる考え方は「ロジスティック理論」(篠崎: 1961) と呼ばれているが、その理論は植物生態学のみならず林学においても応用され、安藤(1968)はロジスティック理論に基づいた林分密度管理図を作成している。大阪市大グループによる1953年以来の一連の研究から安藤による林分密度管理図の提案に至るまでの多くの人々による研究報告については内藤 (1983a) の報告に詳しく述べられているが簡単にその経過をまとめる。

吉良らはその第I報 (Kera *et al.*: 1953) で大豆等の実験から、植物の平均個体重 w と植栽密度 ρ の間に次のようなべき乗関係式を見つけた。

$$w\rho^a = K \quad \text{または} \quad w = Ks^a \quad (2.2.1)$$

ここに a と k はそれぞれ生育段階に依存する定数であり、 s は個体当りの平均利用可能空間を表す。 $Y = w\rho$ とおくと Y は単位面積当りの重量を表し上式は次のように変形される。

$$Y\rho^{a-1} = K \quad (2.2.2)$$

これらの関係は植栽密度と平均個体重との間のみならず、植栽密度と部分重との間にも成立することが実験で確認された。この植栽密度 ρ と平均個体重 w との間に認められる関係や植栽密度 ρ と単位面積当りの収量 Y との間に認められる関係は、大阪市大グループによる一連の研究の第II報 (Kira *et al.*: 1954) でそれぞれ競争密度効果則 (以後C-D効果則と省略)、収量密度効果則 (以後Y-D効果則と省略) と名付けられ、C-D効果のべき乗式におけるべき定数 a は競争密度指数と呼ばれている。

(2.2.1) 式や (2.2.2) 式で表されるC-D効果則やY-D効果則は空間方向に考えられた密度と平均個体重あるいは単位面積当りの収量の関係であったが、大阪市大グループによる一連の研究の第III報 (Ikushima *et al.*: 1955) では平均個体重の成長曲線が検討された。その結果、生嶋らは成長曲線と

して最もふさわしい関数としてlogistic関数を提案してC-D効果やY-D効果のベキ乗式を誘導した。

一方、林学分野でも四手井を始めとし多くの研究者が、林木の成長においてもC-D効果、Y-D効果が認められることを報告している。四手井(1956)は地位に関係なく林分平均樹高の等しい林分において平均幹材積と本数密度との間にC-D効果則と同様の関係が認められることを指摘した。更に四手井は各林分平均樹高階ごとに競争開始時の平均幹材積と本数密度を座標とする点をつなげると、両対数グラフ上で傾きが-2となる直線関係(以後 $v-n$ 線と省略)が認められ、また競争開始時の平均幹材積と林分平均樹高との間には傾き3となる直線関係(以後 $v-h$ 線と省略)が認められることを指摘した。四手井は更に $v-h$ 線と $v-n$ 線から平均幹材積 v を消去すれば林分平均樹高 h と本数密度 n に関する傾き $-3/2$ となる直線関係式が導けることを示し、この線を競争開始時の樹高密度線($h-n$ 線)と名付けた。地位や林齢の異なる様々な林分を等しい林分平均樹高をもつという観点から一つにまとめれば、地位にも林齢にも関係なく立木密度だけによって変化する林分の成長を把握できるという四手井の考えは一つの重要な知見と言えよう。

四手井の他にも林学分野においてC-D効果則と関連した研究が多くなされているが(佐藤ら:1955, 坂口ら:1957), 吉良らと林学分野の研究者の言う「密度」の表現には大きな差のあることに注意する必要がある。大阪市大グループの論文における密度は常に植栽密度が考えられており、平均個体重も常に植栽密度を用いて計算されている。一方、林学分野の研究者の論文における密度は枯死によってその値を減じている現実本数密度である。

枯死を伴う林分成長に関する林学分野の研究は吉良らの研究にも影響を与えた。吉良ら(Kira *et al.*:1956)は大阪市大グループによる一連の研究の第V報で佐藤ら(1955)の論文を引用し、自己間引きおこしている林分の現実本数密度とその平均個体重の間にもC-D効果のベキ乗式が成立するためには、植栽本数密度と現実本数密度との間に次のようなベキ乗式が成立する必要があることを指摘した。ここに C は定数で a , b は密度としてそれぞれ現実本数密度 ρ と植栽本数密度 ρ_0 を考えた

場合の競争密度指数である。

$$\rho^{a-1} = C\rho_0^{b-1} \quad (2.2.3)$$

この式はそれぞれ ρ と ρ_0 を用いた二つのC-D効果式から平均個体重 w と w_0 を消去して得られた式であるが、現実本数密度の減少曲線そのものを表す(2.2.3)式が成立しなければ、枯死を伴う林分に関するC-D効果のベキ乗式が論理的に導けない点に十分注意する必要がある。

一方、穂積ら(Hozumi *et al.*:1956)は大阪市大グループによる一連の研究の第VI報で密度以外の成長要因が競争に及ぼす影響について報告し、競争密度指数について次のような注目すべき指摘を行った。

ある生育段階以降での競争密度指数は、成長要因の供給量をいろいろ変化させてもほぼ1に近い値をとり、成長要因のレベルが同一であれば植栽密度と関係なく単位面積当りの収量はほぼ一定となる。穂積らはこれを最終収量一定則と名称している。

篠崎ら(Shinozaki *et al.*:1956)は大阪市大グループによる一連の研究の第VII報において、それまでの研究を体系化するものとしてC-D効果のロジスティック理論を発表した。篠崎らは理論展開に先立って四つの仮定を設けている。

- ① 植物の平均個体重 w の成長はロジスティック成長曲線に従う。
- ② ロジスティック成長曲線の成長係数は植栽密度 ρ_0 と関係なく一定。
- ③ ある生育段階以降では単位面積当りの収量 Y は植栽密度と関係なく一定。
- ④ 初期平均個体重は植栽密度に関係なく一定。

これらの仮定からC-D効果式やY-D効果式が理論的に導かれ、それまで(2.2.1)式や(2.2.2)式のようなベキ乗式で表現されていたこれらの式は次のような逆数式で表現されることを示し、あわせてその逆証明も行った。

$$\frac{1}{w} = A\rho_0 + B, \quad \frac{1}{Y} = A + \frac{B}{\rho_0} \quad (2.2.4)$$

逆数式でのC-D効果式はベキ乗式でのそれに比べて無競争の状態をも表現できる利点があり、両対数グラフ上での逆数式のグラフはパラメータの値に係わらずその物理的形を変えないという性質

をもっている。一度両対数グラフの目盛りに対応したC-D曲線の定規(C-D定規)を作れば様々なパラメータの値に対応したC-D曲線を描けるので、この性質は実用上大きな意味をもつ。このC-D定規の性質については一連の研究の第X報(Shinozaki *et al.*:1956)で詳しく論じられている。

しかし篠崎らがC-D効果の逆数式を誘導する過程においても、先に指摘したように、密度として植栽密度が用いられていることに注意しなければならない。密度として自己間引きによってその値を減少させる現実本数密度を用いるならば、現実本数密度は生育時間に関して独立とは考えられず、従って必ずしも逆数式のような簡単な形でC-D効果式が得られるとは限らない。それ故、篠崎らは枯死を伴う成長でもC-D効果の逆数式が同時に成立するためには、植栽密度 ρ_0 と現実密度 ρ との間に次のような関係式の成立することが要請されると第VII報の中で指摘している。ただし、 A' と B' は植栽密度 ρ_0 で考えた場合のC-D効果の逆数式のパラメータ、 A は現実密度 ρ で考えた場合のC-D効果の逆数式のパラメータである。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \frac{A'-A}{B} \quad (2.2.5)$$

この式はそれぞれ植栽密度と現実密度で考えた場合の二つのC-D効果の逆数式から平均個体重を消去して得られるものであり、この ρ と ρ_0 に関する逆数線形の関係式は大阪市大グループによる一連の研究の第XI報(Yoda *et al.*:1963)の中で3/2乗則と共に詳しく検証されることになる。しかし $\varepsilon(t)$ の関数形を具体的に求めることができれば、この式は単なる論理の要請の結果ではなく現実密度の減少曲線を規定しているということに十分留意しなければならない。

更に、平均個体重とアロメトリー関係にある部分重に対して、ベキ乗式でのC-D効果式は常に成立するが、逆数式でのC-D効果式はアロメトリーの平衡定数が1の場合のみしか成立しないということも注意する必要がある。

吉良ら(吉良編:1957a, 1957b, 1957c)は大坂営林局局報「みやま」の中でC-D効果のロジスティック理論の農林業への応用についてやさしく解説しているが、その中で注目すべきことは「3/2乗則」が新しく提案されていることである。

吉良らはオオアレチノギクの調査結果から、自然に観察される植物にはある平均個体重に対して現実密度の上限値が存在することを示し、簡単な幾何学的モデルによってその関係式を導いてその関係を「3/2乗則」と呼んだ。この名の由来は平均個体重とそれに対応した現実密度の上限値が両対数グラフ上で傾き-3/2の直線関係を示すことにあるが、実際の林分の資料を調べるとこの傾きは樹種によって異なった値を示し、直線の傾きが樹種の特性を表すという意味でこの関係式を「林分密度の特性曲線」と名付けた。実際の農林業への応用としては林分密度の特性曲線の内側に平行に引かれた直線を平均管理曲線と名付け、この平均管理曲線とC-D効果式を用いて林分密度管理の経路を説明することが可能であることを指摘した。

2.3 Reineke式と3/2乗則, $v-n$ 線の比較

Reineke(1933)は自然に観察される林分の平均胸高断面直径 d_g とその直径に対応した存在可能な最大本数密度 ρ を両対数グラフ上にプロットした結果、次のような直線関係が認められることを指摘した。ここに、 K は樹種によって異なる定数であるが、直線の傾きは樹種に関係なくほぼ一定と考えてよい。

$$\ln \rho = -1.605 \ln d_g + K \quad (2.3.1)$$

この式は現在Reineke式と呼ばれているが、Reinekeの論文の目的は与えられた林分本数密度を評価する適切な指標を捜すことであり、両対数グラフ上で傾き-1.605をもち、 $d_g=10$ (inch)、 $\rho=1000$ (本/Acre)を座標とする点をとる直線($K=4.605$)を基準線(reference curve)と呼んだ。林分の本数密度の混み具合を評価する指標として、任意の林分の本数密度と平均胸高断面直径が与えられた場合、基準線と平行で所与の平均胸高断面直径と本数密度を座標とする点を通る直線が $d_g=10$ (inch)と交わる点の本数密度が提案された。この交点の本数密度は林分密度指数(S.D.I.: Stand Density Index)と呼ばれている。

一方、前節で述べたように四手井(1956)は収穫表試験林資料から、平均樹高を等しくする林分の競争開始時における平均幹材積と本数密度の間に両対数グラフ上で傾き-2なる直線関係($v-n$ 線)を見いだしている。

吉良らは「みやま」に掲載した前述の報告の中でReineke式と四手井の $v-n$ 線を次元をそろえて3/2乗則と比較している。平均幹材積 v は平均個体重 w に比例した平均幹材積 v は平均胸高断面積直径 d_g の3乗に比例すると仮定すれば、本数密度を ρ として3/2乗則やReineke式、四手井の $v-n$ 線はそれぞれ次のように表される。

$$\ln v = -1.5 \ln \rho \quad (2.3.2)$$

$$\ln v = -1.87 \ln \rho \quad (2.3.3)$$

$$\ln v = -2.0 \ln \rho \quad (2.3.4)$$

吉良らはReinekeや四手井の用いた資料の一部は3/2乗則によって説明できると指摘し、両対数グラフ上で $v-\rho$ 直線の傾きは一定値をとらず樹種によって異なり、陽樹的な樹種においては3/2乗則がそのまま当てはまるが陰樹的な樹種では傾きが3/2より大きくなる傾向の認められることを指摘した。

しかしこれら三者の式は全く異なったレベルで論じられていることを認識しなければならない。3/2乗則とReineke式はある成長要因の平均量に対する最多個体密度を論じている点において共通性を有するが、平均個体重や平均胸高断面積直径という次元の異なる変量に関する関係式である。一方、四手井の言う本数密度はある成長要因に対する最多個体密度ではなく「平均樹高を等しくする林分の競争開始時における平均幹材積と本数密度の関係」を論じた物である。吉良らは「四手井の $v-n$ 線と3/2乗則はほぼ同じものである」と述べているが、林学の立場から考えると(2.3.4)式に示される四手井の $v-n$ 線は林分密度管理の下限値を示し、(2.3.2)式と(2.3.3)式に示される3/2乗則とReineke式は林分密度管理の上限値を意味するものと考えられる。

2.4 林学における林分密度管理図の展開とその問題点

大阪市大グループによる一連の研究は林学分野の研究者にも大きな影響を与え、林分密度管理への応用問題として多くの研究成果が発表されている。そしてそれらのほとんどの論文においては、

植栽密度の代わりに枯死を伴う林分の現実本数密度が用いられており、平均個体重の代わりに部分重(多くは平均幹材積)が用いられていることに留意すべきである。何故ならば本来のロジスティック理論は植栽密度と平均個体重との間に展開された理論であり、現実密度や部分重に対してロジスティック理論の成果を適用する場合には様々な前提条件が存在することを忘れてはならない。以下にこの間の林学分野におけるロジスティック理論の応用に関する研究を略述する。

坂口ら(1957)はアカマツ天然生幼齡林分調査資料を解析し、本数密度と林分の成長量との間に吉良たちの法則がかなうか、またそれが林業上どの様な意味をもっているかについて考察した。その結果林木の場合でも吉良たちが述べた「植栽密度と個体の競争または収量とに関する(ベキ乗)法則」の例外ではないと指摘した。更に林業上の意味として林木間の競争開始の密度や収量一定を仮定した場合の林分密度管理と生産材との関係についても言及し、林木では主伐までの長い間に間伐などで本数密度が変化するため、このような場合に数量的関係がどうなるかについては資料不足で論議できないと結論している。この論文はロジスティック理論で取り扱う密度と林学で取り扱う密度は異なっていることを明瞭に意識して書かれた数少ない林学分野の報告の一つであろう。

また四手井ら(1957)はいわゆる「北山林業」を調査し、強度生枝打ち林分における本数密度と林分の成長を論じている。その論文で四手井らは、強度の生枝打ちをすると自然枯死が殆ど生じなくなり、Reinekeの言う最多密度(full density)をこえた高立木密度を長く維持することが可能で、同一平均樹高をもつ普通施業林分と比較するとはるかに大きな林分生産量をもっていることを指摘した。

さらに只木ら(1959)は苗畑での苗木を用いた間伐試験をとおして間伐木の選木方法と主間伐合計量の間関係を検討しているが、この報告の中で「自然間引き(natural thinning or self-thinning)の線」に至る過程についての興味深い示唆が述べられている。自然間引き線とは森林が満密度(full density)に達したとき任意の立木本数に対して示し得る個体の最大値を示した線で、一般に

$$w = kp^{-a}$$

という式で示される。ここで w は個体重(単木材積), ρ は立木密度, k と a は樹種によって決まる定数であるが, a は普通 $3/2 \sim 2$ の値をとる。

現実の林分における立木本数の減少は植栽直後からこの自然間引き線にのらず, 自然間引き線に至るまでの過程が存在しその過程には何らかの法則性が存在することを只木らは暗示した。この論文でいう自然間引き線は本数密度に対して考えられる変量の次元に差が認められるが, 本質的に吉良らのいう林分密度の特性曲線やReineke式と同一のものと考えられる。

坂口(1961)は佐藤ら(1955)のアカマツの資料を用いて立木密度と幹・枝の材積の間に認められる競争密度効果を調べた結果, その競争密度指数は約1.03となることから収量一定則が成立していると考えられると指摘した。さらに一般の施業林分で取り扱われる立木密度の範囲内で密度の違いによって収量に差がないということになれば, 間伐の問題は目的とする形質の材を最大かつ短期間に得る過程を研究することになると指摘した。

只木ら(1962)は前報(只木ら:1959)に引続いて, 総間伐本数を一定とした場合の間伐時期及び間伐回数の違いが林木の成長に与える影響を小型若齢林分を用いて検討したが, この論文には注目すべき結論が二点ある。

一つは試験終期における幹現存量に関することで, 間伐区と無間伐区の間には幹現存量, 現実本数密度という点でかなりの差が認められるが間伐区間には余り差が認められないという結論である。もう一点は林冠の閉鎖を破らない程度の間伐であれば間伐の時期と回数によらず主間伐合計量の差は認められないという結論である。

更に只木らは無間伐区の立木密度と平均幹重量との間に $3/2$ 乗則の成立が認められるとしてその関係式を計算し, それを「full density curve」と呼んでいるが, これは前報の「自然間引き(natural thinning or self-thinning)の線」と同義のものと考えられる。

また安藤ら(1962)はアカマツ天然生除伐試験林の時系列資料を用いて本数密度と林齢がそれぞれ時間方向と空間方向の相対成長に及ぼす影響を検討した。ただしこの論文で検討された相対成長は標本木という単木単位での話であり, 林分の平均個体の相対生長については資料の調整が不十分のためふられていない。安藤らは結論として標本木

の相対成長関係の大部分は本数密度の影響を受けて変化するが, 本数密度の差を無視して林齢による影響を考えると本数密度より林齢による影響がはるかに大きいことを指摘した。相対成長に及ぼす環境要因の影響については過去に寺崎(1915)も検討しており, 本数密度, 立木度, 林齢のなかで林齢による影響が最も大きいと述べている。

林学においては個体重と部分重あるいは樹高, 胸高直径, 幹材積, 胸高断面積等の間に認められる相対成長関係をC-D効果のロジスティック理論に組み込んだ研究が大半を占めてきている。しかし, 個体に関して成立する相対成長関係が果してそのまま平均個体にも成立するのか, 更に相対成長関係のパラメータが立木密度や林齢の影響を受けて変化するのであれば, 部分重に対してC-D効果のロジスティック理論をそのまま適用できるのかということに十分注意しなければならない。

更に安藤(1962)は競争比数, 収量比数という概念を提案してC-D効果の逆数式上の特性値に検討を加え, $3/2$ 乗則により示されるfull density curveに対する新たな解釈を行い, 林業への応用という観点から競争開始線, 自然間引き開始線, 最大収量に対する収量比数線を与えた。これらの概念は林分密度管理図の中で重要な役割を果たすのでその概要を以下に述べる。

ある生育段階において平均幹材積 v と現実本数密度 ρ との間に次式のようなC-D効果の逆数式が成立していると仮定し, その逆数式上で最大平均幹材積の $k(k < 1)$ 倍の平均幹材積をもつ点の座標を (ρ_k, v_k) とすれば, 一般的に ρ_k と v_k は A, B, K の関数として表現される。

$$\frac{1}{v} = A\rho + B$$

$$\rho_k = \rho(A, B, K), \quad v_k = v(B, K)$$

ただし, A と B と K は定数である。更にもし A と B が生育時間 t あるいは林分平均樹高 h のベキ乗式で表されるものと仮定すれば, ρ_k と v_k は K と t (あるいは h)の関数として表現され, ρ_k と v_k から t (あるいは h)を消去することによって点 (ρ_k, v_k) の軌跡 $f(\rho_k, v_k, K) = 0$ が得られる。安藤はこの軌跡が両対数グラフ上で平行な直線群となることを示して K を「競争比数」, 平行な直線群を「競争

比数線」と名付け、この競争比数 K は自然に観察される林分において0でないある最小値と1との間の値をとるものとし、 K がこの最小値をとるときの ρ_k-v_k 軌跡がfull density curveと一致すると考えた。更にY-D効果の逆数式上で最多密度に対応する収量の L 倍の収量をもつ点の座標を (ρ_L, Y_L) とすれば、点 (ρ_L, Y_L) の軌跡は ρ_k-v_k 軌跡と同様に両対数グラフ上で平行な直線群となることを示し、 L とこれらの直線群をそれぞれ「収量比数」、「収量比数線」と呼んだ。またこの論文の中で安藤は、ある密度で植栽された林分がどのような経過をたどってfull density curveに乗るか、について次のような興味深い考察を加えている。

自然間引きのおこらない生育初期の段階では、 $\rho-v$ 線は v 軸と平行に上方に移動して行くが、自然間引きが開始されると $\rho-v$ 線は左に傾き始める。更に生育段階が進むにしたがって $\rho-v$ 線の傾きはその樹種に固有な値に達し、 $\rho-v$ 線はfull density curveに乗り時間の経過と共にfull density curveの上を固有な傾きを保って上昇する。「full density curveは吉良たちも述べているとおり自然間引きを続けた後、初期密度の如何にかかわらず最終的に取れんする線を示すもので、この点よく留意することが必要である」。

安藤の競争比数や収量比数に基づいたfull density curveや競争開始線へのアプローチは注目に値するが、我々はこれらの論理展開を可能にする種々の前提条件に注意を払わなければならない。枯死による立木本数の減少を前提とする林学分野の研究者から見れば、本来のロジスティック理論は植栽本数密度と架空の平均個体重(穂積: 1973)に関して展開された議論であり、C-D効果またはY-D効果の逆数式が現実本数密度と現実平均個体重の間にも適用可能となるためには、(2.2.5)式に示す植栽本数密度と現実本数密度との間の逆数線形式の成立が前提されなければならない。更に平均個体重の代わりに平均幹材積を用いるためには、両者の間に林齢や立木密度等に影響されない相対成長則が成立すると同時にその相対成長の平衡定数が1という前提が必要である。また安藤(1962)の様にC-D効果の逆数式のパラメータ A, B を林齢や林分平均樹高のべき乗式で表現するという仮定は、とりもなおさず林分平均樹高の成長曲線が生育時間のべき乗式で表現されるという仮定につながることに注意しなければならない。更

にfull density curve上での林分の成長を明確に記述した林学分野の論文としてはこの安藤論文が最初のもので考えられ、安藤はその考え方の根拠を吉良らに求めているがその出典は不明である。

一方只木ら(1963)はいくつかの間伐スケジュールを想定し、従来の研究によって得られた「立木密度と幹材生産に関する一般法則」を応用して、主伐幹材積収量や主間伐収量合計等に関するモデル計算を行ったが、この論文は現在の林分密度管理図に大きな影響を与えたものとして重要である。

計算にあたり只木らは次のような仮定を設けた。
①現実の林分調査資料からある平均幹材積に対応する最高本数密度を結んでfull density curveを概略的に求め、自然間引きはこの曲線上でのみ生じる。
②林分平均樹高の等しい調査資料の本数密度と平均幹材積の間にはC-D効果の逆数式と類似の関係式(等平均樹高線と定義されている)が認められ、ある生育段階での間伐による本数密度と平均幹材積の関係の変化は等平均樹高線上での変化と一致する。ただし間伐は幹材積の小なるものより順次行う。只木らは更に吉良らの平均管理曲線と類似の管理曲線(後に只木(1964)は本数管理基準線と呼んでいる)という概念をもちこみ、植栽本数、間伐開始時の林分平均樹高、間伐間隔、間伐本数率、管理曲線を異にしたいくつかの間伐スケジュールを想定した。

モデル計算の結果只木らは次のような結論を得た。主伐時の幹材積現存量は主伐時の立木密度が高いほど多くなるが、十分な植栽密度の林分で林冠の閉鎖後極端に林冠層を疎開することなく間伐を行えば、その主間伐合計量は間伐の経路と無関係にほぼ一定となる。またこのような条件下では間伐度の強弱は主間伐合計量に余り大きな影響を及ぼさない。更に秋田地方のスギ間伐試験地の例を示して、B種間伐でもC種間伐でもほぼ林分密度の特性曲線と平行となるように管理されているようであり、間伐前後の立木本数と平均幹材積は等平均樹高線にほぼ沿っているようで、通常の間伐では厳密に小個体から順に除かなくても間伐前後の平均幹材積の変化を競争密度効果線(等平均樹高線)上で検討できる可能性を指摘した。

間伐前後の $v-\rho$ 関係の変化は等平均樹高線上の移動という形で表現でき、しかも間伐の選木方法は厳密に小個体の順でなく通常の間伐方法でよいとした点、またある生育段階における林分の成長

は、植栽密度や過去の間伐経過に関係なくその時点における v と ρ の大きさ及び林分平均樹高の成長スピードのみによって決定されるとした点は、現在の林分密度管理図の基本的考え方に大きな影響を与えた。等平均樹高線という発想は四手井(1956)が提案したものであるが、ロジスティック理論における逆数式のように論理的に導かれたものではなく経験式であるためさらに論理的検討が必要と考えられる。

只木(1963)は前述の論文(只木ら：1963)に引き続いて想定された間伐スケジュールについてのモデル計算を行ったが、本論において注目すべき点は後に只木の式(穂積：1973)と呼ばれる自然枯死に関する経験式が提案されていることである。現実林分の本数密度の減少と自然間引き(natural thinning or self-thinning)の線の関係について、只木ら(1959)は、植栽直後からこの自然間引き線上で枯死が生じず自然間引き線に至る過程が存在し、そこには何らかの法則性が存在することを示唆していた。只木はその法則性を表す経験式として次の式を提案した。

$$\frac{1}{\rho} = Av + B$$

この式は篠崎ら(1961)が提案したC-D定規のVI型と一致するが、この式は所与の立木密度と平均幹材積をもつ林分成長のガイドラインとして現在の林分密度管理図で重要な役割を果たしている。また只木の式は経験式でありその理論的誘導は興味深い問題であるが、穂積(1973, Hozumi：1977, 1980)や内藤(1983b)は只木の式の理論的誘導を試みている。

ところで林学分野におけるロジスティック理論の応用研究ではないが、大阪市大グループによって重要な論文がこの時期に発表されている。

依田ら(1963)は一連の研究の第XI報として自己間引きの過程に関する論文を発表した。ハツカダイコン、ダイズ、トウモロコシ、ソバ等の一年生植物を材料にした実験から依田らは次のような自己間引きに関する知見を得た。①植栽密度を減じていくと自己間引きをおこさない密度が存在する。②自己間引きは初めゆっくりと次いで激しく最後は再びゆっくりとおきる。③植栽密度に関係なく充分時間が経過すると個体密度はある一定の値に収束する。

依田らは植栽密度と現実密度との間には一連の研究の第VII報で篠崎らが指摘した(2.2.5)式に示される逆数線形式が良く適合することを確認し、時間の経過にともなってパラメータ $1/\varepsilon(t)$ が指数曲線的に減じていくことを指摘した。依田らは引き続いて3/2乗則とC-D効果の逆数式との関係を検討している。この時点に至って初めて植栽密度と現実密度との間に成立することが要請されていた逆数線形式が実験的に確認されたことは、大阪市大グループの一連の論文を読む場合留意すべきであろう。

これまでの四手井、只木、坂口、安藤等を始めとする多くの研究によって、林分密度管理へのロジスティック理論の応用に関する基礎は完成されていた。

安藤(1968)は断面積等平均樹高線という概念を新たに定義し、幹材積等平均樹高線、最多密度曲線、収量比較線、自然間引き線等と一緒に両対数グラフ上に重ねて描くことによって、林分密度管理計画の指針となる「林分密度管理図」を発表した。その後林分密度管理図に関する研究は相場(1975a, 1975b, 1975c)を始め多くの研究者によってなされているが、基本的考え方はこの時点で確立されたといえよう。

ロジスティック理論と林分密度管理図の展開過程を振り返ってみたいわけであるが、既に指摘したようにさまざまな問題点が未解決のまま残されている。

その中でもとりわけ只木の式のような自己間引きをおこしながら成長する林分の軌跡を表す式が、理論式でなく経験式として与えられ、しかも生育段階の進展にともなってどのようにして最多密度曲線(3/2乗則線)に一致してゆくのかは未解決の問題である。また「林分密度管理図の考え方はロジスティック理論に基づいており、その理論的根拠はそちらにゆずって林業の現場への応用を重点的に研究する」という考え方もあるかもしれないが、ロジスティック理論には個体密度の減少という点に問題が残っている。すなわち、本来のロジスティック理論は個体密度の減少が生じないということを前提としたものであり、(2.2.5)式に示す個体密度の減少曲線はある仮定の基にその成立が要請されたものである。(2.2.5)式に示す減少曲線の検証は、依田ら(Yoda *et al.*：1963)の報告があるものの、充分確認されているわけではない。

これらのことは、ロジスティック理論とは異なる数学モデルによる林分成長解析の必要性を意味するものであり、本論文における研究の動機となった事柄である。

第3章以降ではR関数に基づいた一つの林分成長モデルを考え、これらの問題について更に詳しい考察をおこなう。

3章 Richards関数に基づく林分成長モデルと $w-N$ trajectory

3.1 はじめに

林分成長解析において用いられる成長関数は研究者により様々であるが、第1章で考察したG関数、W関数、R関数の他にlogistic関数やMitscherlich関数(鈴木:1979)などが多く用いられている。しかし第1章で明らかになったようにR関数やW関数、G関数には極値統計学の見地から標本極値の分布関数としての解釈が可能であり、林分の成長を一つの多重システムとして考えれば、これらの関数に林分成長関数としての生物学的根拠を与えることが可能である。

ところで大隅(1977)や箕輪(1980)の指摘するようにR関数はベキ乗変換に対してその関数形を保存する。即ち、ある変量 X と Y の間に相対成長関係が認められ変量 X の成長がR関数で表現されるならば、変量 Y の成長もやはりR関数で記述され、相対成長の平衡定数が負の場合変量 Y の曲線は減少型のR関数となる。林分成長にかかわる諸要因間には古くから様々な相対成長関係が観察されており(寺崎:1915, 小林:1978), ベキ乗変換に対して関数形を保存するというR関数の性質は林分成長解析にとって都合がよいものである。

第3章では上記の性質の他にパラメータの生物学的意味付けが可能で、かつパラメータの値によってMitscherlich関数、logistic関数、G関数あるいはそれらの中間タイプの関数を表現できるR関数を基本的な成長関数として採用し、増加型と減少型のR関数の特徴を分析する。次にR関数に基づいた一つの無間伐林分の成長モデルを提案し、個体密度と平均個体重の時間方向の相互関係を表す $w-N$ trajectoryの一般式を誘導し、両対数軸上での $w-N$ trajectoryの曲線形の特徴をパラメータの符号の組合せという観点から検討する。

3.2 Richards関数の型分類とその特徴

3.2.1 Richards関数の型分類

R関数の起源とその特徴については第1章2節において簡単に紹介したが、今後の論旨展開に先立ち改めてR関数の特徴を検討する。従来、R関数は増加関数として用いられる場合が多く、前節で簡単にふれた減少関数としてのR関数の性質はよく知られていない。更に本論ではデミングの最小二乗法(Deming:1946)を用いてR関数のパラメータを求める計算の最初でパラメータ初期値を設定しなければならないが、その初期値設定は初心者にとって想像以上に複雑で困難である。パラメータの値(符号)によってR関数のグラフがどのように変わるか、またその曲線の特徴を知っておくことは、R関数を測定資料へ適用するに際しパラメータ初期値の設定に大いに役立つであろう。

R関数の一般形を(3.2.1)式で表現することにすれば、R関数の1次及び2次の導関数はそれぞれ(3.2.2), (3.2.3)式によって与えられ、R関数の曲線の性質(増加曲線または減少曲線, 変曲点の有無)はこれらの導関数の符号によって解析できる。ただし t は生育時間, A, B, k, n はそれぞれパラメータを表すものとする。

$$y=A\{1-B\exp(-kt)\}^n \quad (3.2.1)$$

$$\frac{dy}{dt}=AnBk\exp(-kt)\{1-B\exp(-kt)\}^{n-1} \quad (3.2.2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Ak^2nB\exp(-kt)\{1-B\exp(-kt)\}^{n-2} \\ \times \{nB\exp(-kt)-1\} \quad (3.2.3)$$

内藤ら(1983a,b)は $A > 0$ として残りのパラメータの符号の組合せによってR関数を表-3.2.1に示す8種類の型に分類した。表から明らかなようにI, IV, VI, VII型が増加関数となりII, III, V, VIII型が減少関数となる。I型とVI型のR関数はそれぞれMitscherlich族, logistic族と呼ばれることもあるが、従来のMitscherlich族(大隅:1977)では $n \geq 1$ という制約が対してI型のR関数では $n \geq 0$ と n に関する制約条件が拡張されている。

次にR関数の型ごとに表現される曲線の特徴を、

変曲点の有無とその位置，上限値あるいは下限値， y 切片の値という観点から検討する。

3.2.2 増加型 R 関数の特徴

① I 型の場合 ($n > 0, k > 0, B > 0$)

(3.2.1) 式に示す関数の定義により $\{1 - B \exp(-kt)\} \geq 0$ でなければならないので t には次のような条件がつく。

$$t \geq \frac{1}{k} \ln B \tag{3.2.4}$$

$t_{min} = (1/k) \ln B$ とすれば

$$\lim_{t \rightarrow t_{min}} y = \lim_{t \rightarrow t_{min}} A \{1 - B \exp(-kt)\}^n = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} A \{1 - B \exp(-kt)\}^n = A$$

であるから I 型の R 関数は下限値 0 と上限値 A をもつ。また (3.2.3) 式から明らかなように $nB \exp(-kt) = 1$ のとき変曲点が現れ、変曲点の座標 (t_f, y_f) は次式で与えられる。

$$t_f = \frac{1}{k} \ln nB, \quad y_f = A \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

t_f の符号は nB と 1 の大小関係で正あるいは負となる。また $n \rightarrow \infty$ としたとき $y_f \rightarrow A/e$ (ただし e は自然対数の底) であるから y_f には上限値 A/e が存在する。

一般に I 型の R 関数は下限値 0 と上限値 A 及び変曲点 ($A/e > y_f \geq 0$) をもつシグモイド曲線を表すが、 n と B の値により $t \geq 0$ となる範囲でその曲線は様々な形をとる。 $nB < 1$ の場合、 $t \geq 0$ なる範

囲において変曲点は現れず曲線は凹関数の単調増加曲線となり y 切片は 0 と A の中間値をとる。 $nB \geq 1$ の場合、 $t \geq 0$ なる範囲で R 関数は変曲点をもつシグモイド曲線を表すが、 y 切片は A/e 以上の値をとれない。ただし t には (3.2.4) 式に示す条件があるので $t < (1/k) \ln B$ なる範囲において関数は定義されず、 $nB \geq 1$ であっても $B > 1$ かつ $1 > n > 0$ である場合には曲線に変曲点が現れず R 関数は凹関数の単調増加曲線を表す。

② IV 型の場合 ($n > 0, k < 0, B < 0$)

この型の場合には

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} A \{1 + B \exp(kt)\}^n = A$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} A \{1 + B \exp(kt)\}^n = \infty$$

であるから IV 型の R 関数は下限値 A をもつ。さらに IV 型の場合 (3.2.3) 式に示す R 関数の 2 次導関数は

$$d^2y/dt^2 = Ak^2n|B| \exp(|kt|) \times \{1 + B| \exp(|kt|) \}^{n-2} \{n|B| \exp(|kt|) + 1\}$$

となり、上式右辺各項は正であるから 2 次導関数は常に正となる。

一般に IV 型の R 関数は下限値 A をもち $t \rightarrow \infty$ で発散する凸関数の曲線形をした変曲点をもたない単調増加関数であり、 y 切片は A 以上の値をとる。

③ VI 型の場合 ($n < 0, k > 0, B < 0$)

この型の場合には

表-3.2.1 パラメータの符号による Richards 関数の型分類

型	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
n	+	+	+	+	-	-	-	-
k	+	+	-	-	+	+	-	-
B	+	-	+	-	+	-	+	-
dy/dt	(+)	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)	(-)
d^2y/dt^2	(+/-)	(+)	(-/+)	(+)	(+)	(+/-)	(+)	(-/+)

脚注：表中の括弧付きの記号は生育時間の経過に伴った符号の変化を表し、(+/-)あるいは(-/+) という記号は生育時間 t の増加にともなって符号が正から負あるいは負から正に変化することを表す。

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{A}{1 + |B| \exp(-kt)^{|n|}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{1 + |B| \exp(-kt)^{|n|}} = A$$

であるからVI型のR関数は上限値Aと下限値0をもつ。変曲点は(3.2.3)式より明らかのように $|nB| \exp(-kt) = 1$ のとき現れ、その座標は次式で与えられる。

$$t_f = \frac{1}{k} \ln |nB|, y_f = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{|n|}\right)^{|n|}}$$

$|n| \rightarrow \infty$ のとき y_f は A/e に近づき、 $A > y_f > A/e$ である。また(3.2.1)式より明らかのようにこの曲線は原点をとらない。

一般にVI型のR関数は上限値Aと下限値0及び変曲点($A > y_f > A/e$)をもつシグモイド曲線を表すが、 $|nB|$ の値により $t \geq 0$ なる範囲において2通りの曲線を表す。 $|nB| \geq 1$ ならば変曲点は $t \geq 0$ なる範囲に現れ、 y 切片が0とAの間の値となるシグモイド曲線となるが、 $|nB| < 1$ ならば変曲点は $t \geq 0$ なる範囲に現れず凹関数の単調増加曲線となり、そのとき y 切片は A/e とAの中間の値をとる。

④VII型の場合 ($n < 0, k < 0, B > 0$)

(3.2.1)式に示す関数の定義により $\{1 - B \exp(|k|t)\} \geq 0$ でなければならぬので t には次のような条件が立つ。

$$t \leq \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{B} \tag{3.2.5}$$

$t_{\max} = (1/|k|) \ln(1/B)$ とすれば

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{A}{1 - B \exp(|k|t)^{|n|}} = A$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y = \lim_{t \rightarrow t_{\max}} \frac{A}{1 - B \exp(|k|t)^{|n|}} = \infty$$

であるからVII型のR関数は下限値をAをもつ。さらにVII型の場合(3.2.3)式に示すR関数の2次導関数は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ak^2|n|B \exp(|k|t) \{ |n| B \exp(|k|t) + 1 \}}{\{1 - B \exp(|k|t)\}^{|n|+2}}$$

となり、上式右辺各項は正であるから2次導関数は常に正となる。

一般にVII型のR関数は下限値Aをもち $t \rightarrow t_{\max}$ で発散する凸関数の曲線形をした変曲点をもたない単調増加関数であり、 y 切片はA以上の値をとる。ただしこの型のばあいには(3.2.5)式に示す条件が立つので生育時間 t には上限値が存在する。

以上、増加型R関数についてその曲線の特徴を調べたが、IV型とVII型のR関数は変曲点と関数の上限値をもたない一方、I型とVI型のR関数は上限値Aをもち、 $t \geq 0$ なる範囲で変曲点を表現することができる。生物の成長曲線は一般にS字形のシグモイド曲線となることが知られており、その意味ではI型とVI型のR関数が成長曲線としてふさわしいものと考えられる。I型とVI型のR関数の間の大きな違いは、変曲点の y 座標が A/e を境としてそれぞれ下と上に分かれることである。 $n \rightarrow \pm \infty$ としたときR関数はG関数に漸近するが、G関数の変曲点が A/e であることを考えればI型とVI型の境界にG関数が存在するとも考えられる。さらにI型の場合には関数の定義によって生育時間に下限値が存在する一方で、VI型の場合、曲線は原点をとることができない。

3.2.3 減少型R関数の特徴

①II型の場合 ($n > 0, k > 0, B < 0$)

$t \rightarrow \pm \infty$ とした場合のII型のR関数は

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} A \{1 + |B| \exp(-kt)\}^n = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} A \{1 + |B| \exp(-kt)\}^n = A$$

となるので、II型のR関数には下限値Aが存在する。さらにこの場合(3.2.3)式に示す2次導関数は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Ak^2 n |B| \exp(-kt) \{1 + |B| \exp(-kt)\}^{n-2} \{ |n| B \exp(-kt) + 1 \}$$

となり、上式右辺各項は正であるから2次導関数は常に正である。従って一般にII型のR関数は変曲点をもたず、 $t \rightarrow \infty$ で下限値をAをもち $t \rightarrow -\infty$ で発散する凸関数の単調減少曲線を表す。

②III型の場合 ($n > 0, k < 0, B > 0$)

(3.2.1) 式に示す関数の定義により $\{1 - \text{Bexp}(k|t)\} \geq 0$ でなければならないので t には VII 型と同様に次のような条件がつく。

$$t \leq \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{B}$$

$t_{\max} = (1/|k|) \ln(1/B)$ とすれば

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} A \{1 - \text{Bexp}(k|t)\}^n = A$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y = \lim_{t \rightarrow t_{\max}} A \{1 - \text{Bexp}(k|t)\}^n = 0$$

となり III 型の R 関数には上限値 A と下限値 0 が存在する。変曲点は (3.2.3) 式により明らかなように $n \text{Bexp}(k|t) = 1$ のとき現れ、その座標は次式で与えられる。

$$t_f = \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{nB}, y_f = A \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $y_f \rightarrow A/e$ となり、 y_f には上限値 A/e が存在する。

以上の結果一般に III 型の R 関数は上限値 A と下限値 0 及び変曲点をもつ減少型のシグモイド曲線となるが、 n と B の値によって $t \geq 0$ なる領域において様々な曲線形を呈する。 $nB > 1$ のとき変曲点は $t < 0$ なる領域に現れ、 $t \geq 0$ なる領域において曲線は凸関数の単調減少曲線となりその y 切片は A/e より大きな値をとれない。 $nB \leq 1$ のとき $t \geq 0$ なる領域で曲線は変曲点をもつシグモイド形の減少曲線を表し、 y 切片は 0 と A の間の値をとり得る。ただし $nB \leq 1$ であっても $n < 1$ の場合には $t_f > t_{\max}$ となり、関数の定義される領域において曲線は変曲点をもたず凹関数の単調減少曲線となる。

③V型の場合 ($n < 0, k > 0, B > 0$)

(3.2.1) 式に示す関数の定義により $\{1 - \text{Bexp}(kt)\} \geq 0$ でなければならないので t には I 型と同様に次のような条件がつく。

$$t \geq \frac{1}{k} \ln B$$

$t_{\min} = (1/k) \ln B$ とすれば

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} y = \lim_{t \rightarrow t_{\min}} \frac{A}{\{1 - \text{Bexp}(-kt)\}^{|n|}} = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{\{1 - \text{Bexp}(-kt)\}^{|n|}} = A$$

であるから V 型の R 関数は下限値 A をもつ。さらに V 型の場合 (3.2.3) 式に示す R 関数の 2 次導関数は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ak^2 n \text{Bexp}(-kt) \{ |n \text{Bexp}(-kt) + 1 \}}{\{1 - \text{Bexp}(-kt)\}^{|n|+2}}$$

となり、上式右辺各項は正であるから 2 次導関数は常に正となる。従って一般に V 型の R 関数は $t \rightarrow \infty$ で下限値 A をもち $t \rightarrow t_{\min}$ で発散する変曲点をもたない凸関数の減少曲線を表し、 y 切片は A より大きい値をとる。ただし $B > 1$ なるときは $t_{\min} > 0$ となり $t = 0$ において関数は定義されない。

④VIII型の場合 ($n < 0, k < 0, B < 0$)

$t \rightarrow \pm \infty$ とした場合の II 型の R 関数は

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{A}{\{1 + |B| \exp(k|t)\}^{|n|}} = A$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{\{1 + |B| \exp(k|t)\}^{|n|}} = 0$$

であるから VIII 型の R 関数は上限値 A と下限値 0 をもつ。変曲点は (3.2.3) 式より明らかなように $|nB| \exp(k|t) = 1$ のとき現れ、その座標は次式で与えられる。

$$t_f = \frac{1}{|k|} \ln \frac{1}{|nB|}, y_f = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{|n|}\right)^{|n|}}$$

$n \rightarrow -\infty$ のとき $y_f \rightarrow A/e$ であるから、 $A/e < y_f < A$ である。

従って一般に VIII 型の R 関数は上限値 A と下限値 0 及び変曲点 ($A/e < y_f < A$) をもつシグモイド型減少曲線を表すといえる。ただし $t \geq 0$ なる領域においてその曲線は $|nB|$ のとる値により異なった形を呈する。 $|nB| > 1$ なるとき変曲点は $t < 0$ なる領域に現れ、 $t \geq 0$ なる領域において曲線は凸関数の単調減少曲線となり y 切片は 0 と A の中間値をとる。 $|nB| \leq 1$ のとき変曲点は $t \geq 0$ なる領域に現れ

y 切片は A/e と A の中間値をとる。

以上、減少型R関数についてその曲線の特徴を調べたが、III型とVIII型のR関数は変曲点と上限値 A 、下限値 0 をもつ一方、II型とV型のR関数は下限値 A をもつが上限値と変曲点をもたない。林分の立木密度の減少という成長現象を考える場合、 0 ではない下限値を表現できるという意味においてII型とV型のR関数は林分成長解析における減少関数として都合がよいと考えられる。但しV型の場合、関数の定義により生育時間に下限値が存在する。

3.2.4 Richards関数の無間伐林分成長資料への適用例

R関数の無間伐林分成長資料への適合度を調べるためにいくつかの計算例を例示する。大隅(1977)、箕輪(1980)の指摘にもあるようにR関数はベキ乗変換に対してその関数形を保存する。従って平均個体重と平均幹材積あるいは平均胸高直径等の成長要因の間に相対成長則を仮定すれば、これらの成長要因はR関数で表現可能である。

ところで本論のような研究にとって地位や植栽密度を違えた長期間にわたる無間伐林分の成長記録は必要欠くべからざるものであるが、そのためには幾世代にもわたる組織的なかつ忍耐強い努力を必要とし、現時点でそのような資料を入手することは非常に困難である。従って本論ではこの分野の多くの研究者が利用しているヒルミの用いた収穫表資料とスパーらの用いたストロブマツ(*Pinus strobus L.*)自然間引き試験林分資料を用いる。

ヒルミ(Khilmi:1957)が利用した収穫表資料はチューリン教授によって作成されたマツ収穫表とトウヒ収穫表およびヴァルガスによって作成されたペテルブルク地方マツ収穫表資料である。ヒルミによるとチューリンの収穫表資料はほとんど保育管理を行っていないマツとトウヒ林の成長資料で1930年に刊行された「林分の標準収穫表」に収録されている。またヴァルガスのマツ収穫表資料についてヒルミは、1952年発行の「測樹便覧」に収録されていること、「約100年前に調査されたもので我々の要求にもっともよく応えるものである」こと以外に詳しい説明をしていない。しかしながら本節で用いる資料はほとんど無間伐で保管管理の行われていない林分の成長資料と考えてよいであろう。

一方、スパーら(Spurr *et al.*:1957)が利用したストロブマツ自然間引き試験林分資料は2箇所(ロット2Bおよび2C)からなる。この試験林は間伐試験林の対照区として設定され、測定は林齢12年から51年にかけてそれぞれ8~9回行われている。従ってこの資料もほとんど無間伐で保育管理の行われていない林分の成長資料と考えてよいであろう。

R関数のパラメータ推定法に関していくつかの報告(大隅:1977, 吉田:1979)があるが、本論ではデミングの最小二乗法(Deming:1946)を用い、計算にあたっては白石のプログラム(白石:1983)を利用した。デミングの方法においてはパラメータ初期値の設定が非常に重要であり、設定値によって反復計算結果が発散してしまう場合がある。計算にはパーソナルコンピュータ(PC-9801, NEC)を用いたが、グラフィック機能を利用して設定されたパラメータ初期値によるグラフを描くことにより測定資料への適合度を判断し、収束計算をスムーズに実行できるよう配慮されている。使用した資料の詳細は表-3.2.2~3.2.5に示し、計算結果は付表-41~44、及び図-3.2.1~3.2.8に示す。なおヒルミの利用した資料は単位面積当たりの総材積と立木本数からなるものであり、平均個体重の増加曲線の当てはめに際しては総材積を立木本数で割って求めた平均幹材積を使用した。

Spurrらの平均直径成長資料にはI型のR関数があてはまり、その適合度も良くパラメータ n は1よりも小さな正数であった。さらにこの場合 $nB < 1$ となり曲線は変曲点をもたない。またSpurrらの立木本数減少資料にはII型のR関数があてはまりその適合度も満足のいくものであった。ただしロット2Bの林齢12年における測定資料は非常に大きな値をとるためパラメータの収束値が得られず、実際の計算ではこの資料は省かれた。更にチューリンのマツ収穫表における立木本数資料の中で地位4と5の林齢20年における資料は、Spurrらのロット2Bの場合と同じ理由により計算から除外された。

付表-41~43に示されるR関数のパラメータ推定値から、 B を除きまとめて表-3.2.6に示す。第1章でも簡単に述べたが(3.2.1)式に示すR関数は $n \rightarrow \pm\infty$ としたとき次式のようなG関数に漸近する。ただし y_0 は y の初期値を表すものとする。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} A \{1 - B \exp(-kt)\}^n \\ &= A \exp \left\{ \exp(-kt) \ln \left(\frac{y_0}{A} \right) \right\} \\ &= A \left(\frac{y_0}{A} \right)^{\exp(-kt)} \end{aligned}$$

Khilmi (1957) は個体密度の資料に対してG関数を当てはめた結果、上式に示すパラメータ k の値はその地位に関係なく樹種ごとに一定値をとると考え、チューリンのマツとトウヒの収穫表資料からそれぞれ $k=0.019$, $k=0.027$ という推定値を得た。これに対して表-3.2.6に示される個体密度減

少関数の k の値は地位間においても同一樹種内においてもかなりばらついた値を示している。R関数はG関数と比較してパラメータの数が一つ多く、それだけ資料に対する適合度は向上すると考えられるが、同時に資料自体に内在する誤差の影響もそれだけ敏感に受ける。従って、このばらつきが資料自体に内在する誤差の影響なのか、それとも個体密度減少過程の本質的な事柄に起因するものか今後検討を要するであろう。

平均幹材積の極限值 A の値は地位の変化に対応しており、個体密度の極限值 A の値もチューリンのトウヒ収穫表地位2を除いてほぼ地位の変化に

表-3.2.2 チューリンのマツ収穫表資料一覧表(Khilmi : 1957)

林齢	総材積(立米/ha)						立木本数(本/ha)					
	地位						地位					
	la	1	2	3	4	5	la	1	2	3	4	5
20	156	127	103	75	53	33	3350	3970	4800	6200	8900	14000
30	315	259	207	154	110	65	2050	2400	2800	3650	4860	6650
40	484	402	329	254	189	125	1430	1640	1940	2400	3300	4880
50	644	541	449	355	268	189	1055	1200	1340	1760	2420	3540
60	785	662	555	447	343	249	820	935	1070	1340	1850	2820
70	909	767	648	530	411	303	670	760	860	1080	1470	2270
80	1015	860	730	604	472	350	562	625	725	905	1220	1880
90	1110	942	803	669	525	391	483	536	625	760	1030	1580
100	1194	1015	867	726	571	427	423	470	550	660	890	1370
110	1265	1076	921	774	609	457	384	426	490	585	790	1210
120	1327	1129	966	813	640	482	350	392	450	535	720	1100
130	1378	1174	1004	845	666	—	331	368	420	495	675	—
140	1420	1211	1036	871	687	—	317	353	400	470	635	—

表-3.2.3 チューリンのトウヒ収穫表資料一覧表(Khilmi : 1957)

林齢	総材積(立米/ha)						立木本数(本/ha)					
	地位						地位					
	la	1	2	3	4	5	la	1	2	3	4	5
20	148	100	55	32	18	11	8365	11708	18515	28291	—	—
30	328	214	144	95	60	36	4120	5930	8062	12411	16805	—
40	565	389	268	184	124	81	2253	3336	4637	6222	8940	12966
50	804	581	418	302	212	147	1523	2136	2891	4034	5371	7249
60	1028	773	574	430	313	226	1135	1509	1979	2657	3584	4772
70	1229	944	723	552	412	306	908	1163	1489	1939	2636	3480
80	1409	1100	854	663	502	380	767	953	1196	1540	2112	2835
90	1567	1239	974	761	584	444	672	815	1010	1295	1759	2401
100	1707	1359	1080	847	654	497	605	724	873	1121	1517	2095
110	1827	1464	1168	920	711	538	559	652	779	999	1353	1904
120	1927	1554	1246	981	760	568	523	598	707	906	1235	1769

表-3.2.4 ヴァルガスのマツヒ収穫表資料一覧表(Khilmi : 1957)

林齢	総材積(立米/ha)				立木本数(本/ha)			
	地位				地位			
	1	2	3	4	1	2	3	4
20	83	60	46	36	—	—	—	—
30	143	106	84	61	3432	4035	4611	5160
40	215	160	126	98	2563	2946	3350	3846
50	287	221	179	138	1776	2086	2379	2745
60	366	287	234	182	1190	1464	1784	2087
70	443	352	290	225	886	1070	1363	1629
80	515	419	343	262	678	851	1098	1308
90	580	479	393	296	604	750	869	1062
100	640	533	436	321	531	668	759	933
110	691	579	472	343	475	604	686	842
120	733	617	503	355	448	549	640	769
130	758	648	527	364	421	521	595	714
140	778	671	541	—	402	494	567	—

表-3.2.5 ストロープマツ無間伐林分成長資料一覧表 (Spurr *et al* :1957)

林齢	平均胸高直径(inch)		立木本数(本/ha)	
	Lot 2B	Lot 2C	Lot 2B	Lot 2C
12	2.1	—	4265	—
16	2.7	3.4	3682	1893
21	3.6	4.4	2786	1493
26	4.4	5.4	2052	1133
31	5.05	6.2	1630	898
36	5.5	6.8	1353	789
41	6.0	7.6	1144	686
46	6.7	8.4	925	595
51	7.2	8.8	815	549

対応している。R関数は n の値が1の場合 Mitscherlich関数を、 n の値が-1の場合にはlogistic関数を、 $n \rightarrow \pm\infty$ の場合G関数を表すと言われているが、ヴァルガスのマツ収穫表地位2の n は200近い値をとり、この場合のR関数はG関数にかなり近似した曲線を表している。

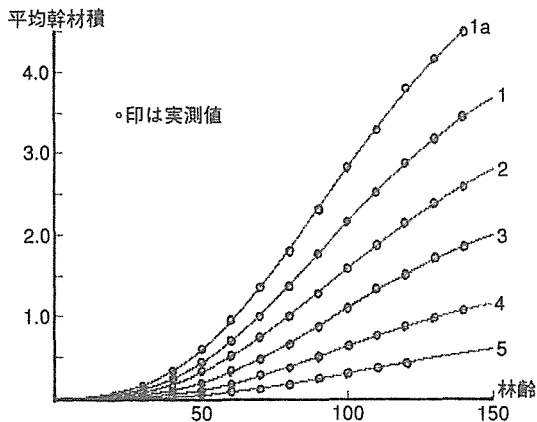


図-3.2.1 チューリンのマツ収穫表平均幹材積増加曲線 (表中の数字は地位を表す。)

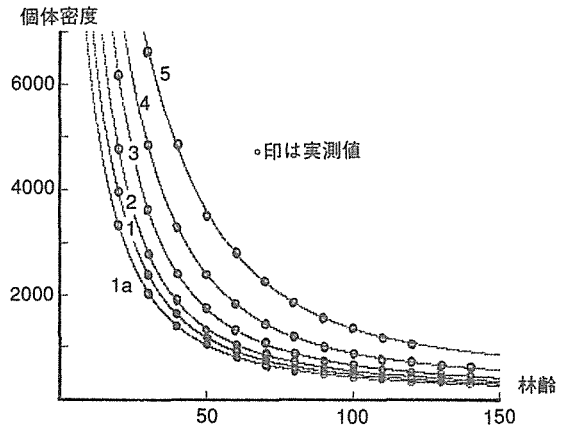


図-3.2.2 チューリンのマツ収穫表個体密度減少曲線 (表中の数字は地位を表す。)

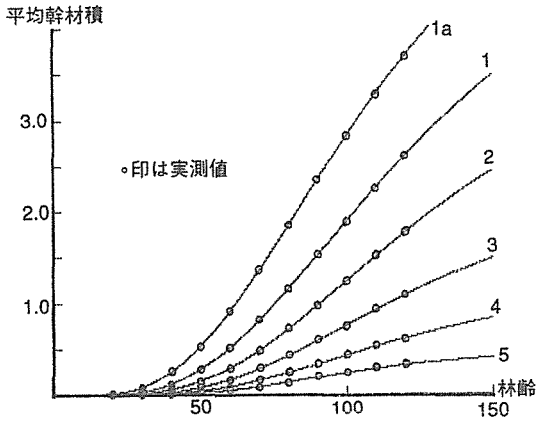


図-3.2.3 チューリンのトウヒ収穫表平均幹材積増加曲線 (表中の数字は地位を表す。)

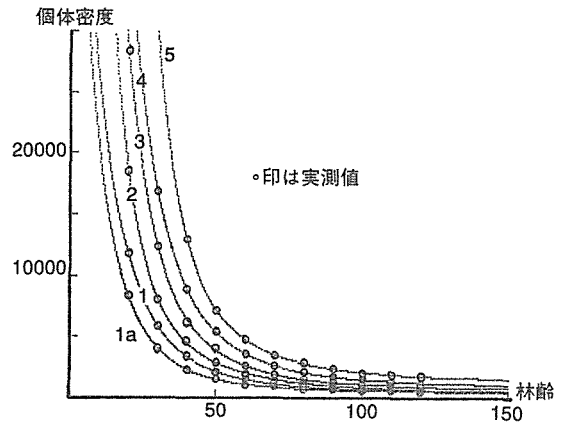


図-3.2.4 チューリンのトウヒ収穫表個体密度減少曲線 (表中の数字は地位を表す。)

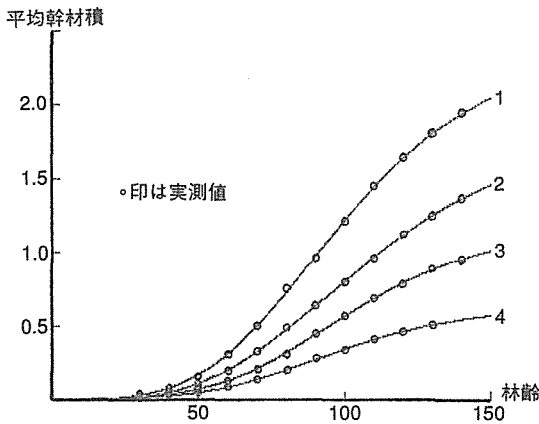


図-3.2.5 ヴァルガスのマツ収穫表平均幹材積増加曲線 (表中の数字は地位を表す。)

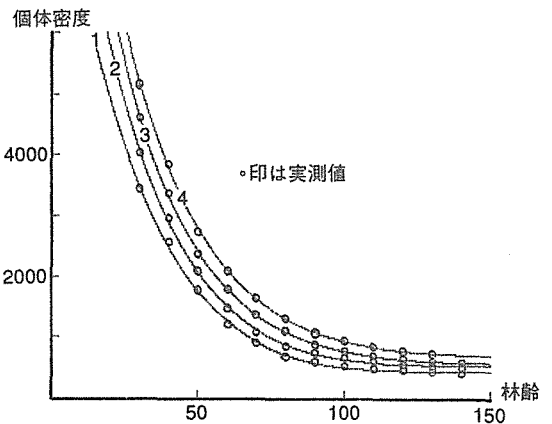


図-3.2.6 ヴァルガスのトウヒ収穫表個体密度減少曲線 (表中の数字は地位を表す。)

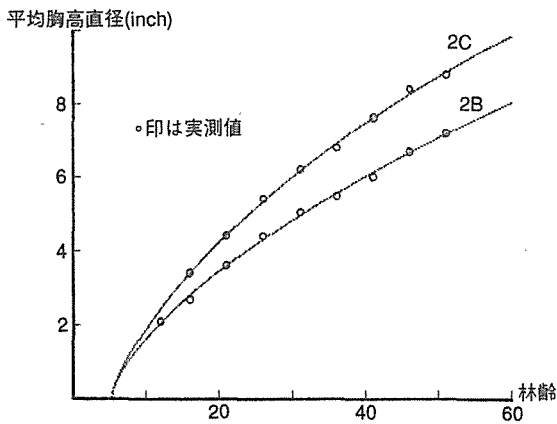


図-3.2.7 ストローブマツ無間伐林分平均胸高直径増加曲線 (表中の数字は試験地のロット番号を表す。)

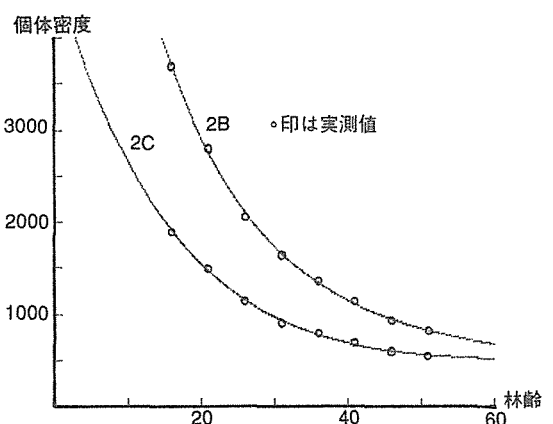


図-3.2.8 ストローブマツ無間伐林分個体密度減少曲線 (表中の数字は試験地のロット番号を表す。)

表-3.2.6 チューリンとヴァルガスの収穫表におけるパラメーター一覧表

収穫表	地位	個体密度			平均幹林積		
		A	k	n	A	k	n
チューリン マツ	1a	182	0.0115	-3.1023	6.3213	0.0218	-73.4719
	1	211	0.0125	-3.5551	4.7628	0.0225	-38.9693
	2	240	0.0120	-3.0153	3.9556	0.0190	12.6577
	3	253	0.0108	-3.0459	2.6969	0.0223	-23.7573
	4	412	0.0157	-17.2917	1.5134	0.0240	-11.6958
チューリン トウヒ	1a	496	0.0358	6.0040	6.2041	0.0194	4.7576
	1	531	0.0331	4.6138	5.2269	0.0170	4.2774
	2	310	0.0122	-3.2682	3.7743	0.0175	5.1575
	3	719	0.0271	30.0343	2.1834	0.0190	5.3945
	4	997	0.0297	7.6653	1.1308	0.0221	8.5776
ヴァルガス マツ	1	433	0.0915	0.3779	2.3907	0.0297	-8.3760
	2	523	0.0712	0.4913	1.8782	0.0240	198.9850
	3	543	0.0485	0.7357	1.1572	0.0345	-3.1056
	4	663	0.0482	0.7020	0.6410	0.0350	-3.1694

3.3 Richards関数に基づく林分成長モデル

林分の現実個体密度、平均個体重および生育時間をそれぞれ N, w, t で表し、これらの成長要因をそれぞれ軸とする3次元直交座標系に描かれた林分の成長軌跡を $w-N-t$ 曲線と呼ぶことにする。また、 $w-N-t$ 曲線を $w-t$ 平面と $N-t$ 平面に平行投影して得られる曲線は、それぞれ平均個体重の成長曲線と個体密度の減少曲線であるが、 t 軸上の適当な位置で t 軸と直交する平面上に $w-N-t$ 曲線を平行投影して得られる曲線を $w-N$ trajectory, その投影面をtrajectory平面と呼ぶことにする。さらに初期平均個体重と初期個体密度の間に適当な関数関係を仮定すれば、異なる初期個体密度に対してそれぞれ異なった $w-N-t$ 曲線が対応し、これらの曲線群によって一つの曲面が形成されるが、ある生育時間 t において t と直交する平面でこの曲面を切断した時の切り口を $w-N$ 曲線、その切断面を t 断面と呼ぶことにする。これらの関係は図-3.3.1に示すとおりである。

$w-N$ trajectoryと $w-N$ 曲線は共に w と N の関数であるが両者は明確に区別されなければならない。初期平均個体重と初期個体密度をそれぞれ w_0

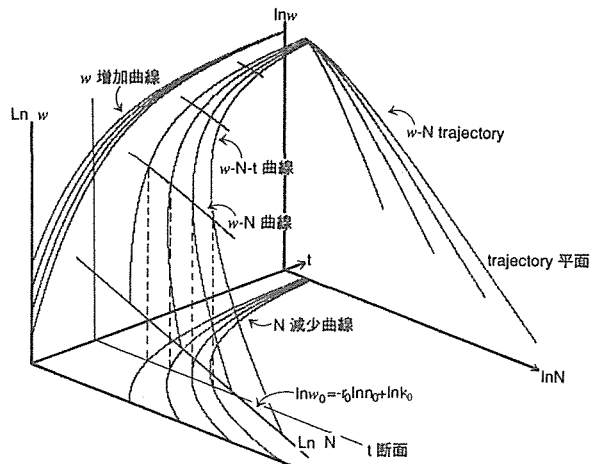


図-3.3.1

3次元直交座標系における林分成長空間と各種の曲線の関係

と N_0 で表せば、任意の生育時間における平均個体重と個体密度はそれぞれ w_0 と N_0 をパラメータとする生育時間 t の関数と考えられ、一般に $w = w(t, w_0)$, $N = N(t, N_0)$ と表現される。 w - N trajectory は初期平均個体重 w_0 と初期個体密度 N_0 が指定された場合の $w(t)$ と $N(t)$ の関係を示すもので、 w_0 と N_0 との間にある関係式を仮定すれば与えられた初期個体密度での林分成長の time course を表現するものである。一方、 w - N 曲線は生育時間 t が指定された場合の $w(w_0)$ と $N(N_0)$ の関係を示すもので、 w_0 と N_0 との間にある関係式を仮定すれば、初期個体密度を異にする同齡林分間のある生育段階における現実平均個体密度と平均個体重の関係を表すものである。平均幹材積と平均個体重という違いがあるが、両者の間に相対成長関係を仮定すると「只木の式」は w - N trajectory と本質的に同じものであり、篠崎らの C-D 効果の逆数式は w - N 曲線の一つである。

さて一本の w - N - t 曲線が与えられるとそれに対応する w - t 曲線、 N - t 曲線、 w - N trajectory は只一つ決定される。反対に w - N - t 曲線を決定するには、 w - t 曲線、 N - t 曲線、 w - N trajectory のうち任意の 2 本の曲線が与えられればよく、残る一本の曲線も必然的に決定される。本論では w - t 曲線と N - t 曲線及び初期条件が以下に示す仮定を満足する一つの成長モデルを考える。

仮定 1：現実平均個体重 w の成長は (3.3.1) 式に示す I 型あるいは VI 型の R 関数に従う。ここに t は生育時間、 w_* 、 k_1 、 n_1 は初期平均個体重や生育時間に依存しない定数、 B_1 は初期平均個体重によって定まる定数、 w_* は w の上限値とする。

$$w = w_* \{1 - B_1 \exp(-k_1 t)\}^{n_1} \quad (3.3.1)$$

仮定 2：現実個体密度 N の減少は (3.3.2) 式に示す II 型あるいは V 型の R 関数に従う。ここに N_* 、 k_2 、 n_2 は初期平均個体密度や生育時間に依存しない定数、 B_2 は初期個体密度によって定まる定数、 N_* は N の極限值とする。

$$N = N_* \{1 - B_2 \exp(-k_2 t)\}^{n_2} \quad (3.3.2)$$

仮定 3：生育時間 t は個体間での成長競争が開始されてからの時間とし、 $t = 0$ において初期平均個体重 w_0 と初期個体密度 N_0 は (3.3.3) 式に示す関係を

満足する。ここに w_0 と K_0 はともに正の定数である。

$$w_0 N_0^{n_0} = K_0 \quad (3.3.3)$$

仮定 1 及び 2 については第 3 章 2 節の R 関数の適用例である程度確認され、仮定 3 については佐藤ら (1955) を始め林学において一般に認められていることと考えられるが、(3.3.3) 式に示されるべき乗式と一般の競争密度効果のべき乗式との違いは、(3.3.3) 式が林分内で個体間の競争が開始された時点で平均個体重とその個体密度との間で考えられている点にある。

(3.3.1) 及び (3.3.2) 式において $t = 0$ とすれば w_0 と B_1 、 N_0 と B_2 との間には次式が成立する。

$$B_1 = 1 - \left(\frac{w_0}{w_*}\right)^{1/n_1} \quad (3.3.4)$$

$$B_2 = 1 - \left(\frac{N_0}{N_*}\right)^{1/n_2} \quad (3.3.5)$$

更に寺崎 (1915) や吉田 (1928) のように (3.3.1) 式と (3.3.2) 式から生育時間 t を消去すれば、ある林分の成長の軌跡を平均個体重と個体密度の変化という観点からとらえた w - N trajectory の一般式が次のように得られる。

$$\left(\frac{w}{w_*}\right)^{1/n_1} = 1 - B_1 \left[\frac{1}{B_2} \left\{ 1 - \left(\frac{N}{N_*}\right)^{1/n_2} \right\} \right]^{k_1/k_2} \quad (3.3.6)$$

ここに B_1 、 B_2 は (3.3.4) 及び (3.3.5) 式の関係を満たし、 w_0 と N_0 は (3.3.3) 式に示す関係を満たすものである。只木は自己間引き現象を最多密度曲線上での自己間引きとそこに至る過程での自己間引きの二つに大別し、最多密度曲線に至るまでの自己間引きを表す経験式として C-D 定規の VI 型に相当する只木の式を提案したが、(3.3.6) 式は只木の式と同じ自己間引き現象を表現する式である。

さて w - N trajectory の w と N は生育時間 t の関数としてとらえられ、それらの 1 次導関数はそれぞれ (3.3.7) 式、(3.3.8) 式で表されるので、両対数グラフ上での w - N trajectory の曲線の傾きは一般に (3.3.9) 式で与えられる。

$$\frac{dw}{dt} = \frac{wn_1 k_1 B_1 \exp(-k_1 t)}{1 - B_1 \exp(-k_1 t)} \quad (3.3.7)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Nn_2k_2B_2 \exp(-k_2t)}{1-B_2 \exp(-k_2t)} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln w}{d \ln N} &= \frac{N}{w} \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dN} \\ &= \frac{n_1k_1B_1 \{1-B_2 \exp(-k_2t)\}}{n_2k_2B_2 \{1-B_1 \exp(-k_1t)\}} \exp\{(k_2-k_1)t\} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

(3.3.1) 式と (3.3.2) 式はそれぞれ増加型と減少型の R 関数であるから $n_1k_1B_1 > 0$, $n_2k_2B_2 < 0$ であり, $n_2k_2B_2$ を除く (3.3.9) 式右辺の各項は常に正または 0 であるから $d \ln w / d \ln N$ は常に負または 0 である。(3.3.9) 式において $t \rightarrow \infty$ とした時の両対数グラフ上での $w-N$ trajectory の傾きは $k_1 > k_2$ のとき 0, $k_1 < k_2$ のとき $-\infty$ となる。また $w-N$ trajectory の傾きが t の値に関係なく常に一定値をとるためには $k_1 = k_2$ かつ $|B_1| = |B_2| (n_1n_2 < 0)$ という条件が必要であり, そのとき $w-N$ trajectory の傾きは n_1/n_2 となる。

本節で誘導した $w-N$ trajectory の一般式が両対数グラフ上でどのような曲線形を示すかについての検討は本章 5 節で, また現実の自己間引き現象や最多密度曲線および競争密度効果などに関して経験的に知られている事実と照らし合わせた林分成長モデルへの改良は第 4 章以降で行うこととし, 次節では (2.2.5) 式に示される篠崎らの個体密度減少曲線と減少型の R 関数との比較検討を行う。

3.4 減少型 Richards 関数と逆数式

前節では個体密度の減少曲線に (3.3.2) 式に示す II 型あるいは V 型の R 関数を仮定した。一方, 第 2 章 2 節で説明したように篠崎ら (Shinozaki *et al.*: 1956) は個体密度の減少曲線として (2.2.5) 式に示す逆数式を提案した。

$$N = N_* \{1 - B_2 \exp(-k_2t)\}^{n_2} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \varepsilon(t) \quad (2.2.5)$$

ところで, 大阪市大グループによる一連の研究の第 I 報 (Kira *et al.*: 1953) によれば, 当初のサイズ等の実験において植栽された個体は植栽密度に関係なくすべて生存し, 枯死する場合は一斉に枯れて実験の継続が不可能であったと報告され

ている。すなわち現実個体密度 ρ は植栽密度 ρ_0 と常に等しく考えられていた。

$$\rho = \rho_0 \quad (t \geq 0) \quad (3.4.1)$$

篠崎らが一連の研究の第 VII 報において (3.4.1) 式と相反する (2.2.5) 式の成立を要請した背景には, その頃の林学分野の研究者が指摘していたことであるが, ρ が時間の経過にともなって減少する場合にも C-D 効果式が成立するという知見があった。すなわち, 単位面積当りの収量を Y で表せば, $w' = Y/\rho_0$ という架空の平均個体重 (穂積: 1973) と植栽密度 ρ_0 の間にも, $w = Y/\rho$ という現実平均個体重と現実個体密度 ρ の間にも同時に (3.4.2) 式と (3.4.3) 式に示すような競争密度効果式が成立すると仮定するならば, $Y = w\rho = w'\rho_0$ であるからこの二つの競争密度効果式から w' と w を同時に消去した (2.2.5) 式が成立しなければならないことを篠崎らは指摘した。

$$\frac{1}{w'} = A'\rho_0 + B' \quad (3.4.2)$$

$$\frac{1}{w} = A\rho + B \quad (3.4.3)$$

ここに A' , B' , A , B は定数であり, (2.2.5) 式の $\varepsilon(t)$ は次式で表される。

$$\varepsilon(t) = \frac{A'-A}{B}$$

このように (2.2.5) 式に示される逆数線形式は二つの C-D 効果式から導かれたものであるが, $w-N$ trajectory や只木の式が平均個体重 (幹材積) を一種の生物時間とした個体密度の減少曲線を表すのに対し, (2.2.5) 式は生育時間そのもので表現される個体密度の減少関数であり, 本論の (3.3.2) 式に対応するものである。以下, 本論で仮定した (3.3.2) 式に示す R 関数と (2.2.5) 式に示す篠崎らの逆数線形式との違いを比較検討する。

(3.3.2) 式において両辺逆数をとり (3.3.5) 式を代入すれば次式を得る。

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_*} \left[\{1 - \exp(-k_2t)\} + \left(\frac{N_0}{N_*}\right)^{1/n_2} \exp(-k_2t) \right]^{n_2}$$

上式において, $n_2 = -1$ とおけば最終的に (3.3.2) 式は次式のように変形される。

$$\frac{1}{N} = \frac{\exp(-k_2 t)}{N_0} + \frac{1 - \exp(-k_2 t)}{N_*} \quad (3.4.4)$$

篠崎 (1961) によれば (2.2.5) 式の $\varepsilon(t)$ の関数形は実験データから推測するしか方法はなく、 $t=0$ のとき $\rho = \rho_0$ であるから $\varepsilon(0) = 0$ でなければならぬ。さらに時間が経過すれば $\rho_0 > \rho$ であるから $\varepsilon(t) > 0$ であり、 $1/\varepsilon(t)$ はある生育時間断面における ρ の上限値 ($\rho_0 \rightarrow \infty$ としたときの ρ) を与える。

一方、減少型の R 関数を変形した (3.4.4) 式において $t=0$ とすれば、右辺第 2 項は $\varepsilon(0)$ 同様 0 となり $N = N_0$ が成立する。さらにある生育時間断面において $N_0 \rightarrow \infty$ としたとき右辺第 1 項は 0 に近づき、右辺第 2 項の逆数は $1/\varepsilon(t)$ と同様 N の上限値を与える。

以上に述べた点において篠崎らの (2.2.5) 式と内藤の (3.4.4) 式は類似点を有するが、 $t \rightarrow \infty$ としたときの N (または ρ) の極限值は異なる。(3.4.4) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば $N \rightarrow N_*$ となるが、(2.2.5) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば $\rho \rightarrow \rho_0 / (1 + \varepsilon_*)$ となる。ただし ε_* は $t \rightarrow \infty$ としたときの $\varepsilon(t)$ の極限值である。

篠崎 (1961) は $\varepsilon(t)$ の関数形として

$$\varepsilon(t) = p \{ \exp(\mu t) - 1 \} \quad (p, \mu > 0) \quad (3.4.5)$$

という関数形を提案しているが、(3.4.5) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば $\varepsilon_* \rightarrow \infty$ となり ρ の極限值は植栽密度 ρ_0 と関係なく 0 となる。

ところで篠崎は p と μ は共に正の定数と考えたが、 p と μ が共に負の定数と考えても $\varepsilon(t) \geq 0$ となり (内藤: 1983b)、上述のような $\varepsilon(t)$ が満足すべき条件は満たされる。その場合、(3.4.5) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば $\varepsilon_* \rightarrow |p|$ となり、 $t \rightarrow \infty$ としたときの ρ の極限值は $\rho_0 / (1 + |p| \rho_0)$ となり植栽密度 ρ_0 の関数となる。

依田ら (Yoda *et al.*: 1963) はゴマ、ソバ等の実験から、充分時間が経過したときの残存個体密度は植栽密度に関係なく一定の値 (a certain density level) に収束するという傾向を見だし、この実験結果に (2.2.5) 式がよく適合したと報告している。しかしながら (2.2.5) 式で表される ρ の極限值は前述のように 0 であり、収束した「一定の値」が 0 でないならば (2.2.5) 式は依田らの実

験結果を説明したことにはならないであろう。

さらに内藤のように p と μ は共に負の定数と考え $|p| = 1/N_*$ 、 $|\mu| = k_2$ とおきかえれば、(2.2.5) 式と (3.4.4) 式の右辺第 2 項は同じ関数形となるが、第 1 項の $1/N_0$ (または $1/\rho_0$) の係数が異なる。従って R 関数から変形される (3.4.4) 式と篠崎らの (2.2.5) 式は似て非なるものであるといえよう。

3.5 w - N trajectory の曲線型と型分類

両対数軸上における w - N trajectory の曲線形はその 1 次及び 2 次導関数の符号を検討することによって調べられる。2 次導関数は、(3.3.9) 式を更に $\ln N$ で微分して得られるが、 $d/d \ln N = (dN/d \ln N) (dt/dN) (d/dt)$ であるから 2 次導関数は次式で表される。

$$\frac{d^2 \ln w}{d \ln N^2} = \frac{F(t)}{G(t)} E(t) \quad (3.5.1)$$

ここに

$$E(t) = k_2 \{ 1 - B_1 \exp(-k_1 t) \} - k_1 \{ 1 - B_2 \exp(-k_2 t) \} \quad (3.5.2)$$

$$F(t) = n_1 k_1 B_1 \{ 1 - B_2 \exp(-k_2 t) \} \times \exp\{(2k_2 - k_1)t\}$$

$$G(t) = (n_2 k_2 B_2)^2 \{ 1 - B_1 \exp(-k_1 t) \}^2$$

である。

(3.5.1) 式右辺において $E(t)$ を除く各項は (3.3.9) 式の場合と同じように考えると正または 0 であるから、(3.5.1) 式に示される 2 次導関数の符号は (3.5.2) 式に示される $E(t)$ の符号と一致する。 t の増加に伴う $E(t)$ の符号の変化は $E(0)$ 、 $E(\infty)$ 及び $dE(t)/dt$ の符号の変化を調べることによって知ることができ、 $E(0)$ や $E(\infty)$ および dE/dt は (3.5.2) 式から次のように表現される。

$$E(0) = k_2(1 - B_1) - k_1(1 - B_2) \quad (3.5.3)$$

$$E(\infty) = k_2 - k_1 \quad (3.5.4)$$

$$dE/dt = k_1 k_2 \{ B_1 \exp(-k_1 t) - B_2 \exp(-k_2 t) \} \quad (3.5.5)$$

これらの式から明らかなように $E(0)$ や $E(\infty)$ お

よび dE/dt の符号は k_1, k_2, B_1, B_2 のとる値によって変化する。

$E(0)$ の符号の変化を調べるために (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) 式を (3.5.3) 式に代入して w_0, B_1, B_2 を消去すると次式を得る。

$$E(0) = k_2 \left(\frac{N_0}{N_*} \right)^{r_0/n_1} \left\{ \left(\frac{K_0}{w_* N_*^{r_0}} \right)^{1/n_1} - \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{N_0}{N_*} \right)^{(n_1+n_2r_0)/n_1n_2} \right\} \quad (3.5.6)$$

一般に $N_0 \geq N_*$, $w_* \geq w_0$ で $K_0/N_*^{r_0}$ は (3.3.3) 式において $N_0 = N_*$ とおいた場合の w_0 であるから、上式においては $N_0/N_* \geq 1, K_0/w_* N_*^{r_0} \leq 1$ が成立する。

$n_1 + n_2r_0 \neq 0$ と仮定して $E(0) = 0$ を N_0 について解いたときの値を N_e で表すことにすれば N_e は次式で与えられ、 $N_e < N_*$ なる場合には $N_0 \geq N_*$ なる領域において $E(0)$ は一定符号となる。

$$N_e = N_* \left\{ \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{K_0}{w_* N_*^{r_0}} \right)^{1/n_1} \right\}^{n_1n_2/(n_1+n_2r_0)} \quad (3.5.7)$$

さらに $n_1 + n_2r_0 = 0$ の場合、 $E(0)$ の符号は N_0 の値に関係なく $\{K_0/(w_* N_*^{r_0})\}^{1/n_1}$ と k_1/k_2 の大小関係で一意的に定まり一定符号となる。

従って N_0 の変化に対応した $E(0)$ の符号の変化は (3.5.7) 式によって $N_e \geq N_*$ なる N_e の存在を調べ、ついで (3.5.6) 式によって $E(0)$ の符号の変化を調べればよい。 $n_1, n_2, n_1 + n_2r_0, k_1 - k_2$ のとる符号の組合せごとに、初期個体密度 N_0 の変化に対応した $E(0)$ の符号の変化をまとめて表-3.5.1 に示す。表中の記号 $+/-$ は $N_0 < N_e$ なる領域において $E(0) > 0, N_0 > N_e$ なる領域においては $E(0) < 0$ を意味し、単なる記号 $+$ または $-$ は $N_0 \geq N_*$ なる領域において $E(0)$ が常に正または負を意味する。

つぎに生育時間の経過に伴う dE/dt の符号の変化を調べるために (3.5.5) 式を変形すると次式を得る。

$$dE/dt = k_1 k_2 \exp -k_2 t) B_1 \times [\exp\{(k_2 - k_1)t\} - B_2/B_1] \quad (3.5.8)$$

(3.5.8) 式より明らかなように dE/dt の符号が逆

転するためには、右辺の大括弧の中を 0 にする $t (t \geq 0)$ の存在する必要があるが、換言すれば、 $k_2 > k_1$ の場合は $B_2/B_1 \geq 1, k_1 > k_2$ の場合は $1 > B_2/B_1 > 0, k_2 = k_1$ の場合は $B_1 = B_2$ であることが必要となる。

B_2/B_1 と 1 の大小関係を調べるために $(B_1 - B_2)$ を計算すると (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) 式より次式を得る。

$$B_1 - B_2 = (N_*/N_0)^{r_0/n_1} \{ (N_0/N_*)^{(n_1+n_2r_0)/n_1n_2} - [K_0/(w_* N_*^{r_0})]^{1/n_1} \} \quad (3.5.9)$$

(3.5.9) 式右辺の大括弧の中が 0 であれば $B_1 = B_2$ となり、その時の N_0 の値を N_d で表せば、 $n_1 + n_2r_0 \neq 0$ の場合の N_d は次式で与えられる。

$$N_d = N_* \left\{ \left(\frac{K_0}{w_* N_*^{r_0}} \right)^{1/n_1} \right\}^{n_1n_2/(n_1+n_2r_0)} \quad (3.5.10)$$

また $n_1 + n_2r_0 = 0$ の場合の $(B_1 - B_2)$ の符号は N_0 の値と関係なく一意的に定まり、 $B_1 = B_2$ となるのは $K_0/(w_* N_*^{r_0}) = 1$ が成立する場合である。

従って N_0 の値に対応した dE/dt の符号の時間変化は次のような手順で調べることができる。最初に (3.5.10) 式において $N_d \geq N_*$ なる N_d の存在を調べることにより、 $t \geq 0$ における dE/dt の符号の変化が初期個体密度 N_0 の値に依存するかしないかが判明する。次に (3.5.9) 式により N_0 の変化に伴った B_1 と B_2 の大小関係の変化が判明し、 B_1 の符号に注意して B_2/B_1 と 1 の大小関係を調べれば $dE/dt = 0$ を成立させる $t (t \geq 0)$ の存在を調べられる。最後に (3.5.5) 式または (3.5.8) 式において $t \rightarrow 0$ あるいは $t \rightarrow \infty$ とした場合の符号を検討すれば、生育時間 t の増加にともなった dE/dt の符号の変化を知ることができる。

$n_1, n_2, n_1 + n_2r_0, k_1 - k_2$ の符号の組合せごとに上記の手順にしたがって dE/dt の符号の時間変化を調べた結果を表-3.5.2 にまとめて示す。 dE/dt の符号の時間変化の仕方は初期個体密度にも影響を受けるので表現が複雑になるが、時間方向の変化は小括弧で囲ってある。例えば表中の $(-/+)$ という記号は t の増加にともなって dE/dt の符号が負から正へ変化することを意味し、 $(-/+)/(+)$ という記号は時間方向の dE/dt の符号変化が N_0 の増加にともない N_d を境として $(-/+)$ から $(+)$

表-3.5.1 パラメータ間の符号の組合せに対応した $E(0)$ の符号の変化

$n_1 n_2$	$n_1 + n_2 r_0$	n_1, n_2	$E(0)$ ($k_1 < k_2$)	$E(0)$ ($k_1 = k_2$)	$E(0)$ ($k_1 > k_2$)
+	+	+, +	+/- or -	-	-
+	-	-, -	+	+	-/+ or +
-	+	+, -	-/+ or +	-/+	-/+
-	+	-, +	+	+	-/+ or +
-	-	+, -	+/- or -	-	-
-	-	-, +	+/-	+/-	+/- or -
-	0	+, -	+, 0 or -	- or 0	-
-	0	-, +	+	+ or 0	-, 0 or +

脚註：表中の+/-という記号は $N_0 < N_e$ なる領域において $E(0) > 0$ 、 $N_0 > N_e$ なる領域において $E(0) < 0$ を表し、単なる記号+, 0, -は、 $N_0 \geq N_*$ なる領域において常に $E(0)$ が正、0、負となることを表す。

表-3.5.2 パラメータ間の符号の組合せに対応した dE/dt の符号の変化

$n_1 n_2$	$n_1 + n_2 r_0$	n_1, n_2	dE/dt ($k_1 < k_2$)	dE/dt ($k_1 = k_2$)	dE/dt ($k_1 > k_2$)
+	+	+, +	(+)	(+)	(+)
+	-	-, -	(-)	(-)	(-)
-	+	+, -	(+)/(-/+)	(+)/(-)	(+/-)/(-)
-	+	-, +	(-)	(-)	(-/+)
-	-	+, -	(+)	(+)	(+/-)
-	-	-, +	(-)/(+/-)	(-)/(+)	(-/+)/(+)
-	0	+, -	(+)	(+)	(+/-)
-	0	-, +	(-)	(-)	(-/+)

脚註：表中の括弧付きの記号は表-3.2.1と同じく生育時間の経過にともなった dE/dt の符号の変化を表し、(+)/(+/-)という記号は時間方向の dE/dt の符号変化が、 N_0 の増加にともない、 N_d を境として(+)から(+/-)へと変化することを表す。

へと変化することを意味する。

表-3.5.1と表-3.5.2から $E(t)$ の符号の変化を調べる際に、 N_* より大きな N_e と N_d が同時に存在する場合の N_e と N_d の大小関係を検討しておく必要がある。 N_e と N_d の間には (3.5.7) 式と (3.5.10) 式から次式に示す関係がある。

$$N_e = N_d (k_2/k_1)^{n_1 n_2 / (n_1 + n_2 r_0)} \tag{3.5.11}$$

従って N_e と N_d の大小関係は k_1 と k_2 の大小関係及び $n_1 n_2 / (n_1 + n_2 r_0)$ の符号によって決まり、 $k_1 = k_2$ の場合は $N_e = N_d$ となる。

さらに、 $dE/dt = 0$ を満足する生育時間 $t (t \geq 0)$ を τ とおけば、(3.5.5) 式より $B_1 \exp(-k_1 \tau) = B_2$

$\exp(-k_2 \tau)$ が成立し、この関係を (3.5.2) 式に代入して整理すれば次式のように変化され、 $\{1 - B_1 \exp(-k_1 \tau)\} > 0$ であるから $E(\tau)$ と $(k_2 - k_1)$ の符号は一致する。

$$E(\tau) = (k_2 - k_1) \{1 - B_1 \exp(-k_1 \tau)\} \tag{3.5.12}$$

(3.5.11) 式と (3.5.12) 式の関係に注意して表-3.5.1と表-3.5.2から $E(t)$ の符号の変化を調べ、 $w-N$ trajectory の1次及び2次導関数の符号によってその両対数軸上での曲線形を調べると以下に示す11通りのタイプに分類される。またパラメータ間の符号の組合せや大小関係に対応した $w-N$ trajectory の曲線の型を表-3.5.3に示す。

表-3.5.3 パラメータ間の符号の組合せに対応した $w-N$ trajectory の型分類

$n_1 n_2$	$n_1 + n_2 r_0$	n_1, n_2	$w-N$ trajectory の型		
			$(k_1 < k_2)$	$(k_1 = k_2)$	$(k_1 > k_2)$
+	+	+, +	B or I	D	D
+	-	-, -	A	A	E or J
-	+	+, -	C or A	H	E
-	+	-, +	A	A	E or J
-	-	+, -	B or I	D	D
-	-	-, +	B	G	F or D
-	0	+, -	A or I	D or K	D
-	0	-, +	A	A or K	D or J

脚註： A 型から K 型までの $w-N$ trajectory の定義は本文第 3 章第 5 節参照。

- ① A 型： $w-N$ trajectory が常に凸関数となる場合。
- ② B 型： $w-N$ trajectory が $N_0 \leq N_e$ で常に凸関数， $N_0 > N_e$ で変曲点をもち生育時間の経過に伴って凹関数から凸関数に変化する場合。
- ③ C 型：B 型と反対に $w-N$ trajectory が $N_0 < N_e$ で変曲点をもち生育時間の経過に伴って凹関数から凸関数に変化し， $N_0 \geq N_e$ で常に凸関数となる場合。
- ④ D 型：A 型と反対に $w-N$ trajectory が常に凹関数となる場合。
- ⑤ E 型： $w-N$ trajectory が $N_0 \leq N_e$ で常に凹関数， $N_0 > N_e$ で変曲点をもち生育時間の経過に伴って凸関数から凹関数に変化する場合。
- ⑥ F 型：E 型と反対に $w-N$ trajectory が $N_0 < N_e$ で変曲点をもち生育時間の経過に伴って凸関数から凹関数に変化し， $N_0 \geq N_e$ で常に凹関数となる場合。
- ⑦ G 型： $w-N$ trajectory が $N_0 = N_e$ で直線， $N_0 < N_e$ で常に凸関数， $N_0 > N_e$ で常に凹関数となる場合。
- ⑧ H 型：G 型と反対に $w-N$ trajectory が $N_0 = N_e$ で直線， $N_0 < N_e$ で常に凹関数， $N_0 > N_e$ で常に凸関数となる場合。
- ⑨ I 型： $w-N$ trajectory が常に変曲点をもち，生育時間の経過にともなって凹関数から凸関数に変化する場合。
- ⑩ J 型： $w-N$ trajectory が常に変曲点をもち，生育時間の経過にともなって凸関数から凹関数に変化する場合。

⑪ K 型： $w-N$ trajectory が傾き n_1/n_2 をもつ一本の直線上に重なる場合。

表-3.5.1 と表-3.5.2 から表-3.5.3 を導く過程を代表的な 2 組のパラメータの組合せを例に説明する。

(1) $k_1 > k_2$, $n_1 > 0$, $n_2 < 0$, $n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合。

(3.5.10) 式と (3.5.11) 式より N_* と N_d 及び N_e の間の大小関係は $N_e > N_d > N_*$ である。この大小関係に注意して第-3.5.1 及び表-3.5.2 を用いて $E(0)$, dE/dt , $E(\infty)$, $E(t)$ の符号の変化を調べると表-3.5.4 に示すとおりとなる。ただし (+/-) という記号の意味は前述の説明に準ずる。表-3.5.4 から $E(t)$ の時間変化は初期個体密度 N_0 に応じて異なっていることが明らかである。

$N_0 > N_e$ の場合， $E(0)$ の符号は正で $E(t)$ は t の増加にともなって単調に減少し， $t \rightarrow \infty$ で負となる。従って $w-N$ trajectory は変曲点をもち， t の増加に伴って凸関数から凹関数に変化する。

$N_e \geq N_0 \geq N_d$ の場合， $E(0)$ の符号は負または 0 で $E(t)$ は t の増加にともなって単調に減少し， $t \rightarrow \infty$ と負となる。従って $w-N$ trajectory は常に凹関数となる。

$N_0 < N_d$ の場合， $E(0)$ は負で $E(t)$ は t の増加にともなってその値を増加させながら $dE/dt = 0$ となるときに最大値をとり，その後単調に減少し $t \rightarrow \infty$ と負となる。しかし (3.5.12) 式より $E(\tau)$ の符号は負となるので $E(t)$ は常に負である。従って $w-N$ trajectory は常に凹関数となる。

以上の結果この場合の $w-N$ trajectory は E 型と判定される。

(2) $k_1 = k_2$, $n_1 > 0$, $n_2 < 0$, $n_1 + n_2 r_0 = 0$ の場合。

表-3.5.4 初期個体密度 N_0 に対応した $E(0)$ 、 $E(\infty)$ 、 dE/dt 、 $E(t)$ の符号変化
 $(k_1 > k_2, n_1 > 0, n_2 < 0, n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合)

N_0	$E(0)$	dE/dt	$E(\infty)$	$E(t)$
$N_* \leq N_0 < N_d$	-	(+/-)	-	(-)
$N_0 = N_d$	-	(0/-)	-	(-)
$N_d < N_0 < N_e$	-	(-)	-	(-)
$N_0 = N_e$	0	(-)	-	(0/-)
$N_e < N_0$	+	(-)	-	(+/-)

脚注：表中の括弧付き符号の意味は生育時間の経過に伴う符号の変化を示す。

(3.5.6) 式において、 $n_1 + n_2 r_0 = 0$ であるから $E(0)$ の符号は N_0 と関係なく定まり、 $k_1 = k_2$ であるから $\{K_0 / (w * N_*^{r_0})\}^{1/n_1}$ と 1 の大小関係に依存する。

$w * N_*^{r_0} = K_0$ の場合、 $E(0)$ の値は N_0 と関係なく常に 0 となり、さらに N_0 と関係なく $B_1 = B_2$ が成立するので $E(t)$ は常に 0 となる。この場合の $w-N$ trajectory はすべて傾き n_1/n_2 をもつ直線と

なる。

$w * N_*^{r_0} > K_0$ の場合、 $E(0)$ の符号は負であり、 $E(t)$ は t の増加に伴って単調に増加しながら $t \rightarrow \infty$ で 0 となるから、 $E(t)$ の符号は常に負となる。この場合の $w-N$ trajectory は常に凹関数となる。以上の結果をまとめれば表-3.5.5 に示すとおりとなり、この場合の $w-N$ trajectory は D 型もしくは K 型と判定される。

表-3.5.5 初期個体密度 N_0 に対応した $E(0)$ 、 $E(\infty)$ 、 dE/dt 、 $E(t)$ の符号変化
 $(k_1 = k_2, n_1 > 0, n_2 < 0, n_1 + n_2 r_0 = 0$ の場合)

N_0	$E(0)$	dE/dt	$E(\infty)$	$E(t)$
$N_* \leq N_0$	- or 0	(+) or (0)	0	(-) or (0)

脚注：表中の括弧付き符号の意味は生育時間の経過に伴う符号の変化を示す。

3. 6 $w-N$ trajectory の適用例

本節で用いる資料は第 3 章第 2. 4 節で用いたチューリンのマツとトウヒの収穫表資料及びヴァルガスのマツ収穫表資料 (Khilmi : 1957) であり、資料についての説明は第 3 章 2 節に譲り省略する。

林齢 20 年 (一部資料は 30 年あるいは 40 年) における生育時間 t を 0 と仮定し、さらに (3.3.3) 式に示されるパラメータ r_0 の値を仮に 0.8 と想定し、(3.2.1) 式に示す R 関数のパラメータ推定値に対応する $w-N$ trajectory の型を調べると只木の式のような凹関数の曲線形を示す型の他に変曲点をもったり常に凸関数の曲線を示す型が得られ、それらの結果をまとめて表-3.6.1 に示す。表-3.6.1 から明らかなようにパラメータ間の符号や大小関係の組合せでは 4 通りのものが認められたが、その

組合せに対応する $w-N$ trajectory の型では、B 型と E 型及び I 型の 3 種類の型しか出現しなかった。今回の結果では $n_1 n_2 / (n_1 + n_2 r_0)$ と $(k_2 - k_1)$ の符号が常に同符号となっており、 $N_e \geq N_d$ が常に成立している。表中の括弧付きの数字は計算の過程で機械的に計算されたものであり、 N_* より小さな値となっており理論上有り得ない個体密度である。E 型と B 型および I 型を代表してそれぞれチューリンのマツ収穫表地位 4、ヴァルガスのマツ収穫表地位 4、チューリンのトウヒ収穫表地位 1 の場合の $w-N$ trajectory を例示するとそれぞれ図-3.6.1、図-3.6.2、図-3.6.3 のとおりである。

表-3.6.1 のチューリンのトウヒ収穫表地位 2 の例に見られるように、 N_e の値が現実の本数密度をはるかに越えるような場合には、現実の実験においては常に $N_0 < N_e$ が成立していると考えられ、その $w-N$ trajectory は理論的に変曲点をもつ E

表-3.6.1 チューリンとヴァルガスの収穫表資料における、 $w-N$ trajectoryの型およびパラメータ間の符号と大小関係

収穫表名	(地位)	n_1	n_2	$k_2 - k_1$	$n_1 + n_2 r_0$	N_*	N_d	N_e	型
チューリンマツ	1a	-	-	-	-	182	(164)	1,119	E
	1	-	-	-	-	211	(167)	1,174	E
	2	+	-	-	+	240	562	3,112	E
	3	-	-	-	-	253	(178)	1,317	E
	4	-	-	-	-	412	(84)	2,416	E
5	+	+	+	+	656	(226)	(355)	I	
チューリントウヒ	1a	+	+	+	+	497	(56)	(349)	I
	1	+	+	+	+	531	(59)	(305)	I
	2	+	-	-	+	310	9,149	99,971	E
	3	+	+	+	+	720	(30)	(213)	I
	4	+	+	+	+	997	(162)	(606)	I
5	+	-	-	+	1,419	5,622	12,634	E	
ヴァルガスマツ	1	-	+	+	-	434	485	755	B
	2	+	+	+	+	524	(521)	887	B
	3	-	+	+	-	544	1,148	1,586	B
	4	-	+	+	-	663	1,249	1,642	B

型であっても現実には常に凹関数の曲線形を示す $w-N$ trajectoryしか観察されないであろう。このことは見方を変えると苗畑における小型林分での超密植試験に警鐘をならすものであり、また現実の成長現象から観察される知見を誤って拡大解釈することの危険性を示すものである。 $w-N$ trajectoryが理論的にはE型である場合、 $N_0 \geq N_e$ となるような超密植試験の結果から得られる $w-N$

trajectoryは変曲点をもつであろう。しかしながら現実には営まれる林業での N_0 が常に N_e より小さな範囲に含まれるものであれば、現実には観察される $w-N$ trajectoryはD型と同じく常に凹関数の曲線形をしており、この場合には超密植試験で得られた知見をそのまま現実の林業経営に適用できないからである。

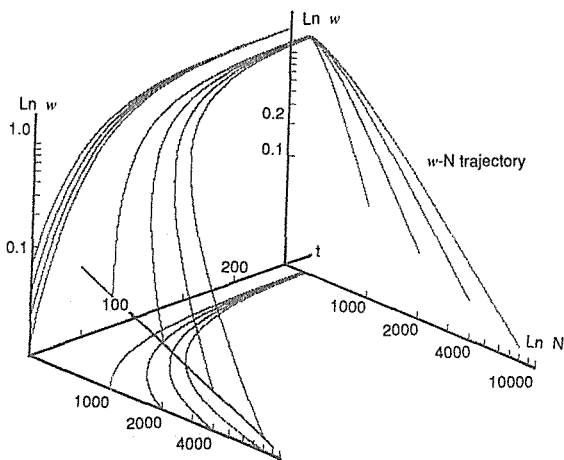


図-3.6.1 チューリンのマツ収穫表地位4の $w-N$ trajectory(E型)

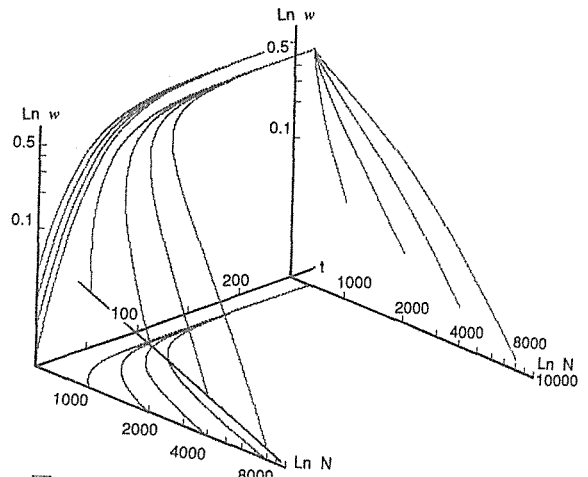


図-3.6.2 ヴァルガスのマツ収穫表地位4の $w-N$ trajectory(B型)

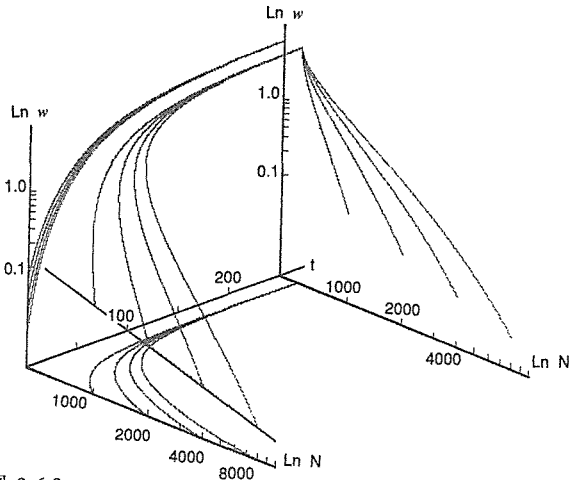


図-3.6.3
チューリンのトウヒ収穫表地位Iの w - N trajectory (I型)

4章 最多密度曲線

4.1 はじめに

ある個体密度で生育する群落を放置しておくとし、生育が進むにつれて個体相互間の競争が激しくなり、その結果、個体間に優劣差が生じて劣性個体から枯れて個体密度は減少する。この現象は自然間引きあるいは自己間引きと呼ばれている。また充分な密度 (full density) をもつ林分においては、個体密度とその密度に対して存在可能な最大の平均断面直径、平均幹材積、平均個体重との間にベキ乗関係式が認められており、それぞれ Reineke式 (Reineke: 1933)、最多密度曲線 (只木ら: 1962)、 $3/2$ 乗則 (吉良編: 1957c) と呼ばれている。

一方、只木 (1963) は自己間引きの過程を最多密度曲線に至るまでの過程と最多密度曲線上での過程に分け、最多密度曲線に至るまでの過程における自己間引きを表す式として只木の式と呼ばれる実験式を提案した。しかし只木はその論文で自己間引き現象が只木の式から最多密度曲線に乗り移る過程についての理論的説明を与えていない。

これに対して穂積 (Hozumi: 1977, 1980, 1983)、箕輪 (1982, 1983a, 1983b)、内藤 (1983b, 1984a) らは、それぞれロジステック理論、log-Mitscherlich理論、R関数に基づいた林分成長モデルによって自己間引き現象を統一的に説明する試みを行っている。

第4章では、 w - N trajectoryの一般式と自己間引き現象に関する過去の知見との比較をとおして、前章の林分成長モデルに新たな仮定を追加してそれをより具体化し、自己間引き現象を統一的に説明する試みを行うと共に、最多密度曲線に対する新しい一つの解釈を与え、最多密度曲線を媒介として林分成長モデルの基礎となるR関数のパラメータ間の関係について考察する。

4.2 林分成長モデルの改良

第3章で導かれた w - N trajectory はその2次導関数の符号の変化によって11種類の型に分類され、両対数グラフ上での曲線の傾きは (3.3.9) 式によって与えられた。(3.3.9) 式を再掲すれば次式のとおりである。

$$\frac{d \ln w}{d \ln N} = \frac{n_1 k_1 B_1}{n_2 k_2 B_2} \cdot \frac{1 - B_2 \exp(-k_2 t)}{1 - B_1 \exp(-k_1 t)} \exp(k_2 - k_1) t \quad (3.3.9)$$

ところで現実には観察される多くの自己間引き曲線は、只木の式にみられるように両対数グラフ上で単調減少する凹関数の曲線形をしており、生育時間の経過にともなってその傾きはある負の値 (多くの場合 $-3/2$ 前後の値) に近づくことが経験的に知られている (只木ら: 1959, 1962, 安藤: 1962)。一方、(3.3.9) 式で $t \rightarrow \infty$ としたときの w - N trajectoryの傾きは、 $k_2 \neq k_1$ の場合 B_1, B_2 の値 (または初期個体密度 N_0 の値) と関係なく $-\infty$ ($k_2 > k_1$) または 0 ($k_2 < k_1$) となり、 $k_1 = k_2$ の場合は次式で表される定数に漸近する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d \ln w}{d \ln N} = \frac{n_1 B_1}{n_2 B_2} \quad (4.2.1)$$

従って、上述の自己間引き曲線に関する過去の知見に照らして、 $k_1 = k_2$ という条件を満たす w - N trajectoryのみが自己間引き曲線を表現できる可能性をもつと考えられる。

一方、両対数グラフ上の w - N trajectoryの曲線形は表-3.5.3に示す11通りの型に分類されたが、この中で $k_1 = k_2$ という条件を満たすのは、A, D, G, H, K型のみである。この中でも只木の式に見られるように単調減少する凹関数の曲線形を表現できるものは、D型と $N_0 < N_d$ なる範囲のH型および $N_0 > N_d$ なる範囲のG型である。ここに N_d

は (3.5.10) 式で表され、 N_0 の定義により $N_0 = N_d$ のとき $B_1 = B_2$ となる。そこで上記 3 種の型について、 $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow N_d$) かつ $t \rightarrow \infty$ としたときの $w-N$ trajectory の傾きについて検討する。検討に先だって (4.2.1) 式中の B_1/B_2 を違った表現で表せば、 B_1 と B_2 がそれぞれ (3.3.4) 式と (3.3.5) 式で表現され、 w_0 と N_0 の間には (3.3.3) 式が仮定されているので次式を得る。

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{N_0^{1/n_2} (K_0/w_*)^{1/n_1} N_0^{-(n_1+n_2r_0)/n_1n_2}}{N_0^{1/n_2} N_*^{-1/n_2}} \quad (4.2.2)$$

(1) G 型 ($n_1 < 0, n_2 > 0, n_1 + n_2r_0 < 0, k_1 = k_2, N_0 > N_d$) の場合

(4.2.2) 式において $N_0 \rightarrow \infty$ とすれば $B_1/B_2 \rightarrow 0$ となり、同時に $t \rightarrow \infty$ としたときの $w-N$ trajectory の傾きは (4.2.1) 式より 0 となる。

(2) H 型 ($n_1 > 0, n_2 < 0, n_1 + n_2r_0 > 0, k_1 = k_2, N_0 < N_d$) の場合

$N_0 \rightarrow N_d$ とすれば第 3 章 5 節における N_d の定義により $B_1 = B_2$ となり、(3.3.9) 式より $w-N$ trajectory の傾きは t と関係なく常に n_1/n_2 となる。

(3) D 型その 1 ($n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2r_0 > 0, k_1 = k_2$) の場合

(4.2.2) 式において $N_0 \rightarrow \infty$ とすれば $B_1/B_2 \rightarrow 0$ となり、同時に $t \rightarrow \infty$ としたときの $w-N$ trajectory の傾きは (4.2.1) 式より 0 となる。

(4) D 型その 2 ($n_1 > 0, n_2 < 0, n_1 + n_2r_0 \leq 0, k_1 = k_2$) の場合

(4.2.2) 式において $N_0 \rightarrow \infty$ とすれば $B_1/B_2 \rightarrow 1$ となり、 $w-N$ trajectory の傾きは (3.3.9) 式より t と関係なく常に n_1/n_2 となる。

従って、生育時間の経過に伴って両対数グラフにおける自己間引き曲線の傾きが負のある値に近づくという過去の知見と矛盾しない $w-N$ trajectory の型は D 型その 2 と H 型の二つであり、 $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow N_d$) としたときの $w-N$ trajectory は傾き n_1/n_2 をもつことが明かとなった。初期個体密度を異にして成長するこれらの $w-N$ trajectory の曲線形を模式的に描けば、図-4.2.1 に示すように終点 (N_*, w_*) から垂れ下がった単調減少する凹関数の曲線群となり、 $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow$

N_d) としたときの $w-N$ trajectory のみが、傾き n_1/n_2 をもつ直線となることができる。

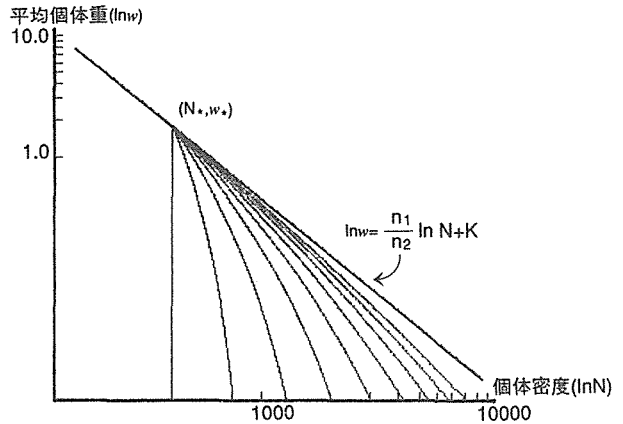


図-4.2.1 同一地位で初期個体密度の異なる $w-N$ trajectory (K は定数)

ところで D 型その 2 の $w-N$ trajectory は $n_1 + n_2r_0 = 0$ かつ $w_* N_*^{r_0} = K_0$ のとき K 型となり、その曲線形は常に傾き n_1/n_2 をもつ一本の直線となる。(3.3.3) 式において初期個体密度 N_0 を個体密度の極限值 N_* と等しくすれば、個体間で成長競争の始まる点において $w_0 N_*^{r_0} = K_0$ を仮定したことになる。一般に初期平均個体重は極限平均個体重より小さいと考えられるので $w_* N_*^{r_0} > K_0$ と考えてよいだろう。

以上、自己間引き現象に関する過去の知見と $w-N$ trajectory の曲線形を比較検討した結果、第 3 章 3 節で提案した林分成長モデルの仮定に対し次のような追加修正を行う。

追加修正 1 : 仮定 1 の現実平均個体重の成長を表す R 関数は I 型 ($n_1 > 0, B_1 > 0$), 仮定 2 の個体密度の減少を表す R 関数は V 型 ($n_2 < 0, B_2 > 0$) とする。さらに現実平均個体重の成長を表す R 関数のパラメータ k_1 と個体密度の減少を表す R 関数のパラメータ k_2 は等しい値をもつ。

$$k_1 = k_2 = k \quad (4.2.3)$$

追加修正 2 : 仮定 3 に次の条件を追加する。

$$w_* N_*^{r_0} > K_0 \quad (4.2.4)$$

従って改良された林分成長モデルの $w-N$ trajectory は、(4.2.3) 式に示される新たな仮定を (3.3.6) 式に代入して次式に示す簡単な表現に変形さ

れる。

$$\left(\frac{w}{w_*}\right)^{1/n_1} = 1 - \frac{B_1}{B_2} \left\{1 - \left(\frac{N}{N_*}\right)^{1/n_2}\right\} \quad (4.2.5)$$

4.3 w - N trajectoryと只木の式

第2章4節において既に述べたように、只木(1963)は自己間引きおこしながら成長する林分の現実個体密度 ρ と平均幹材積 v の時間方向の関係式として(2.4.1)式に示す経験式を提案した。

$$1/\rho = Av + B \quad (2.4.1)$$

ここに A と B は初期個体密度によって定まる定数である。

一方、(4.2.5)式に示される w - N trajectoryの式を只木の式と比較するため、個体密度 N が左辺にくるように変形すれば次式を得る。

$$1/N^y = aw^x + b \quad (4.3.1)$$

ここに a , b , x , y はそれぞれ次式で表される定数である。

$$\begin{aligned} x &= 1/n_1 \\ y &= -1/n_2 \\ a &= (B_2/B_1)w_*^{1/n_1}N_*^{1/n_2} \\ b &= (1-B_2/B_1)N_*^{1/n_2} \end{aligned}$$

平均個体重 w と平均幹材積 v の間に $w = cv^d$ (c , d は定数)という相対成長関係を仮定して(4.3.1)式に代入し、 ac^x を改めて a とおきかえて $y = 1$, $xd = 1$ とすれば、(4.3.1)式は形式的に只木の式と一致する。さらに $d = 1$ を仮定すれば $x = y = 1$ となり、その仮定は、 $n_1 = 1$, $n_2 = -1$ を仮定したと同値である。この仮定は(3.3.1)式において w または v の成長関数としてMitscherlich関数を、(3.3.2)式において N の減少関数としてlogistic関数を仮定したことを意味する。また $xd = 1$ で d が1前後の値をとる場合には n_1 が1から少し離れた値をとり、それは w の成長関数としてMitscherlich関数から少し離れたR関数を仮定したことになる。

一方、穂積(1973)によると篠崎(未発表)は、植栽密度で考えた平均個体重の成長がlogistic曲線に従うことと現実個体密度とその平均個体重の間

にも競争密度効果の逆数式が成立するという仮定から一つの $w(t)$ - $\rho(t)$ 関係の軌跡を表す式を導いた。さらに穂積(1973)は篠崎の $w(t)$ - $\rho(t)$ 関係の軌跡を基礎として只木の式が適当な近似のもので導けることを示した。

論理の流れという観点から本節における只木の式の誘導と穂積の誘導を比較すると両者は興味深い対比をなしている。内藤は現実個体密度の減少曲線にlogistic関数を、現実平均個体重の成長曲線にMitscherlich関数あるいはそれから少し離れたR関数を仮定して只木の式を誘導している。これに対して穂積は植栽密度で考えた平均個体重の成長曲線にlogistic関数を、現実個体密度の減少曲線として(2.2.5)式に示す逆数線形式を仮定して只木の式を誘導したと考えることができよう。

この内藤による只木の式の誘導は(4.2.5)式に示す w - N trajectoryのもつ一つの側面を述べると共に穂積による誘導法との比較をしたにすぎず、決して只木の式の正当性を積極的に推奨するものではない。

前節で述べたように(3.3.9)式に示す w - N trajectoryの両対数グラフ上での傾きは $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow N_d$)としたとき n_1/n_2 となるから、 $n_1 = 1$, $n_2 = -1$ と仮定した場合(只木の式)の傾きは -1 に近づくことになる。このことは、生育時間の経過に伴って両対数グラフにおける自己間引き曲線の傾きが負のある値(多くの場合は $-3/2$ 前後の値)に近づくという自己間引き現象に関する過去の知見と只木の式が矛盾することを意味し、只木の式は $3/2$ 乗則と論理的整合性をもたなくなる。然るに(4.2.5)式に示す w - N trajectoryは $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow N_d$)としたときの傾きが n_1/n_2 となり、 n_1 と n_2 の値によっては $-3/2$ 前後の値をとる可能性が残されている。この点について次節で更に詳しい考察を行うことにする。

4.4 w - N trajectoryと最多密度曲線

Khimi(1957)はチューリンのマツ収穫表質料を解析して、マツ林分の限界密度(本論における N_*)は地位が下がるにつれて増大すると指摘している。本論のこれまでの論旨展開では地位要因を考慮してこなかったが、平均個体重の極限值(上限値) w_* と個体密度の極限值(下限値) N_* は地位によって異なるものと仮定する。地位が何らかの方法で数量化されそれが SI で表されるものとす

れば、両対数グラフ上の $w_*(SI)$ と $N_*(SI)$ を座標値とする点は地位 SI の変化に応じてある軌跡を描き、この軌跡を w_*-N_* 曲線と呼ぶことにする。この w_*-N_* 曲線は経験的に知られている3/2乗則を満足するものと考え、前節で修正された林分成長モデルに対しさらに次の仮定を追加する。

仮定4：平均個体重の極限值（上限値） w_* と個体密度の極限值（下限値） N_* は地位によって異なるが、それらは次に示す関係式を満足する。ただし、 r と K_* は正の定数とする。

$$w_*N_*^{r_*} = K_* \quad (4.4.1)$$

この仮定は地位によって異なる値をとる w_* (SI)と $N_*(SI)$ を座標値とする点が両対数グラフ上で傾き $-r_*$ となる直線上に存在することを意味する。筆者はこの w_*-N_* 曲線が最多密度曲線を与えるものとする。充分生育時間が経過して林分が最多密度（full density）の状態になるとき、初期個体密度や地位と関係なくすべての自己間引き曲線が最多密度曲線に接しながら吸い込まれていくと安藤や只木を始め多くの研究者が考えているようであるが、このような見解に関して現在十分な実験的裏付けが存在しているわけではない。しかし、少なくとも十分に大きな初期個体密度をもつ $w-N$ trajectoryが、その林分の地位と関係なく同一の最多密度曲線と一致すると考えるならば、そのときの $w-N$ trajectoryの傾きは w_*-N_* 曲線の傾きと等しくなければならない。従って $w-N$ trajectoryとして前節で検討したD型あるいはH型を仮定すれば、次式が成立しなければならない。

$$r_* = -n_1/n_2 \quad (4.4.2)$$

この場合、地位の違いを込みにして考えた一群の $w-N$ trajectoryは図-4.4.1に示すように、 w_*-N_* 曲線から垂れ下がった単調減少する凹関数の曲線群となり、最多密度曲線（ w_*-N_* 曲線）はこれらの曲線群の外側にひかれた接線として考えられる。

只木は最多密度曲線に至る過程の自己間引きと最多密度曲線上での自己間引きを連続したものと考えたが、本論での最多密度曲線の解釈では $N_0 \rightarrow \infty$ （または $N_0 \rightarrow N_d$ ）のとき以外、最多密度曲線上での自己間引きは考えられず、最多密度曲線は地

位ごとに定まる w_* と N_* の軌跡として理解される。また穂積や箕輪は初期個体密度に関係なくすべての $w-N$ trajectoryが最多密度曲線に接すると考えたが、本論では $N_0 \rightarrow \infty$ （または $N_0 \rightarrow N_d$ ）としたときの $w-N$ trajectoryのみが最多密度曲線と一致し、その漸近過程で自己間引きがあたかも最多密度曲線上で生じているかのように観察される。

さらに既に述べたように現実の最多密度曲線の傾きが $-3/2$ 前後の値をとる場合が多いので、(4.4.2)式において $r_* = 3/2$ とすれば n_1 と n_2 の間には次式のような関係が成立すると考えてよいであろう。

$$n_1/n_2 = -3/2 \quad (4.4.3)$$

以上のことから(4.2.5)式または(4.3.1)式で示される $w-N$ trajectoryの式は、最多密度曲線の解釈まで含めて自己間引き現象を統一的に説明できるモデルの一つと考えられる。さらにR関数のパラメータ n_1 と n_2 は植物の同化形態に関するパラメータとして考えられてきたが、両者を最多密度曲線と関連づけて考えると n_1/n_2 は両対数グラフ上の最多密度曲線の傾きを与えるものとも理解される。

4.5 林分成長モデルのパラメータ推定法

第3章における $w-N$ trajectoryの一般式においては、(3.3.1)式と(3.3.2)式に示すR関数のパラメータはそれぞれ独立に計算されていた。しかし本章2節及び4節の考察によって、平均個体重

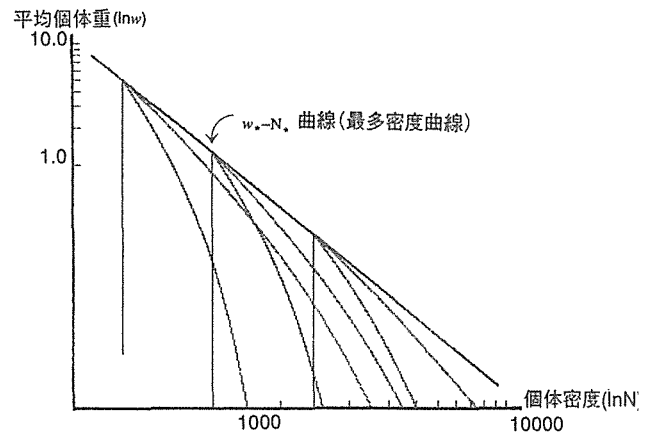


図-4.4.1 地位を込みにした $w-N$ trajectory と最多密度曲線

表-4.5.1 n_1 と n_2 の値を仮定したR関数のパラメータ計算結果(チューリンのマツ収獲表資料)

		n_1	4	6	8	10	30	-30	-15	-
		(n_2	-8/3	-4	-16/3	-20/3	-20	20	10)	-
地位 1a	w_*		7.4704	7.0121	6.8219	6.7179	6.4717	6.2630	6.1702	6.3213
	N_*		166	203	218	227	248	267	275	182
	B_1		1.0105	0.8052	0.6607	0.5579	0.2150	-0.2488	-0.5356	-0.0973
	B_2		0.8271	0.6594	0.5420	0.4584	0.1777	-0.2074	-0.4488	0.7661
	k_1		0.0154	0.0174	0.0184	0.0190	0.0206	0.0222	0.0230	0.0218
	k_2		0.0101	0.0134	0.0151	0.0161	0.0188	0.0216	0.0230	0.0115
地位 1	w_*		5.6365	5.2999	5.1597	5.0829	4.9008	4.7462	4.6774	4.7628
	N_*		178	221	240	250	275	297	306	211
	B_1		1.0393	0.8304	0.6824	0.5768	0.2228	-0.2585	-0.5569	-0.1956
	B_2		0.8386	0.6718	0.5536	0.4690	0.1826	-0.2141	-0.4645	0.7215
	k_1		0.0158	0.0178	0.0188	0.0195	0.0211	0.0227	0.0235	0.0225
	k_2		0.0099	0.0134	0.0151	0.0162	0.0190	0.0218	0.0233	0.0125
地位 2	w_*		4.5022	4.2007	4.0765	4.0089	3.8495	3.7152	3.6557	3.9556
	N_*		222	271	292	304	332	356	367	240
	B_1		1.0163	0.8128	0.6682	0.5649	0.2184	-0.2535	-0.5464	0.4675
	B_2		0.8483	0.6827	0.5639	0.4784	0.1870	-0.2203	-0.4790	0.8003
	k_1		0.0149	0.0169	0.0179	0.0185	0.0202	0.0218	0.0226	0.0190
	k_2		0.0107	0.0143	0.0161	0.0172	0.0202	0.0231	0.0246	0.0120
地位 3	w_*		3.3303	3.0907	2.9926	2.9393	2.8148	2.7094	2.6632	2.6969
	N_*		227	293	321	337	375	408	423	253
	B_1		1.0676	0.8624	0.7126	0.6044	0.2356	-0.2758	-0.5971	-0.3556
	B_2		0.8589	0.6945	0.5751	0.4886	0.1918	-0.2269	-0.4945	0.8075
	k_1		0.0148	0.0170	0.0180	0.0187	0.0204	0.0221	0.0229	0.0223
	k_2		0.0095	0.0131	0.0150	0.0161	0.0191	0.0222	0.0237	0.0108
地位 4	w_*		1.8802	1.7537	1.7019	1.6737	1.6072	1.5513	1.5266	1.5134
	N_*		262	329	359	375	415	451	467	412
	B_1		1.1116	0.9002	0.7446	0.6318	0.2466	-0.2890	-0.6259	-0.8397
	B_2		0.8533	0.6856	0.5654	0.4791	0.1865	-0.2184	-0.4733	0.2131
	k_1		0.0155	0.0176	0.0187	0.0193	0.0210	0.0227	0.0235	0.0240
	k_2		0.0083	0.0112	0.0127	0.0135	0.0159	0.0182	0.0195	0.0157
地位 5	w_*		1.2147	0.0512	0.9905	0.9588	0.8879	0.8319	0.8081	0.9980
	N_*		198	318	372	403	479	548	580	656
	B_1		1.0302	0.8486	0.7079	0.6038	0.2389	-0.2840	-0.6194	0.7292
	B_2		0.8512	0.6754	0.5533	0.4669	0.1797	-0.2079	-0.4475	-1.2692
	k_1		0.0127	0.0153	0.0166	0.0174	0.0194	0.0215	0.0225	0.0164
	k_2		0.0050	0.0079	0.0093	0.0102	0.0125	0.0148	0.0160	0.0191

脚注：右端の欄は n_1 , n_2 の値を仮定しない場合の推定値。

表-4.5.2 n_1 の値に対応した立木密度の推定値の比較
(チューリーンのマツ収穫表地位 1a、単位：林齢(年)、立木密度(本/ha))

林齢	実測値	n_1	4	6	8	10	30	-30	-15	-73.47
		n_2	-8/3	-4	-16/3	-20/3	-20	20	10	-3.102
20	3,350	3,350	3,346	3,344	3,343	3,339	3,335	3,333	3,348	
30	2,050	2,059	2,069	2,074	2,077	2,085	2,093	2,097	2,064	
40	1,430	1,416	1,419	1,420	1,421	1,423	1,426	1,428	1,417	
50	1,055	1,051	1,048	1,046	1,045	1,043	1,041	1,040	1,050	
60	820	824	818	815	814	809	805	803	821	
70	670	673	667	664	662	657	653	650	670	
80	562	567	562	560	558	554	550	548	565	
90	483	490	487	485	484	482	479	478	489	
100	423	433	431	431	430	429	428	428	432	
110	384	388	389	389	390	390	391	391	389	
120	350	353	356	358	359	361	363	364	355	
130	331	325	330	333	334	338	342	344	327	
140	317	303	310	313	315	321	326	329	306	

の増加と個体密度の減少を表すR関数のパラメータ間の相互関係が明かとなった。

即ち、 w_* と N_* の間には(4.4.1)式に示す関係が、 k_1 と k_2 の間には(4.2.3)式に示す関係が、 n_1 と n_2 の間には(4.4.3)式に示す関係が、 B_1 と B_2 の間には(4.2.2)式に示す関係があり、これらのパラメータはお互いに独立には求められない。従ってある特定の地位の資料に対して、(4.3.1)式または(4.2.5)式に示される $w-N$ trajectoryは K_0 と K_* も含めて6個のパラメータをもつことになり、直接 $w-N$ trajectory式を平均個体重と個体密度の測定資料に当てはめてパラメータを推定するのが通常の計算方法であろう。しかし K_* はすべての地位の資料に共通したパラメータであり、それ以外のパラメータはすべての地位の資料において共通である保証はないので、 $w-N$ trajectoryを資料に直接当てはめてパラメータを計算するのは現在のところ非常に困難である。そこで次のような簡略計算法が考えられる。

n_1 と n_2 の間には(4.4.3)式に示す関係があるので n_1 の値を仮定すれば自動的に n_2 の値も決定され、ある特定の地位の資料に対して様々な n_1 の値を仮定して対応した w_* と N_* の組合せを求めることが可能である。さらにこの w_* と N_* を座標とする点は同時に(4.4.1)式に示される最多密度曲線の式を満足するものでなければならない。従って最多

密度曲線の式が与えられれば、様々な n_1 の値に対応した w_* と N_* を座標とする点の軌跡と最多密度曲線との交点として各地位の w_* と N_* を求めることが可能である。しかしこの簡略計算法は(4.2.3)式に示される k_1 と k_2 の間の関係や(4.2.2)式に示される B_1 と B_2 の関係が考慮されないという欠点もっている。

次に第3章で説明したチューリーンのマツ収穫表

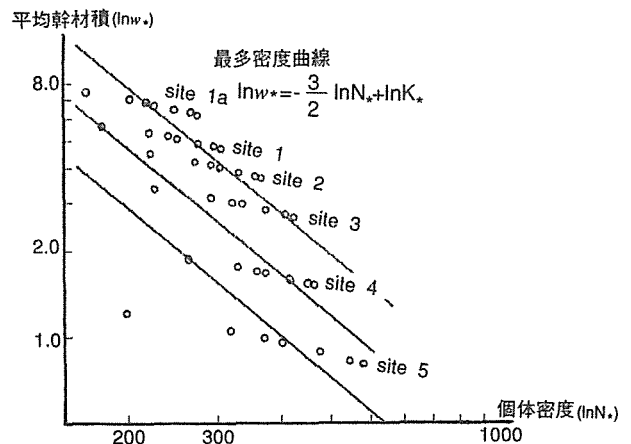


図-4.5.1 n_1 の値に対応した地位ごとの極限値と最多密度曲線
(ある地位の点は左から $n_1=4,6,8,10,30,-30,-15$ の値に対応した極限値で、三本の最多密度曲線はそれぞれ上から順に $\ln K_*=10,9.5,9.9$ が仮定されている)

資料を用いて、この簡略計算の例を紹介する。

改良された林分成長モデルでは $n_1 > 0$ と仮定されているが、 n_1 の値として7通り(4,6,8,10,30,-30,-15)の値を仮定した。この値は(1.2.4)式における m の値に変換すれば、(3/4,5/6,7/8,9/10,29/30,31/30,16/15)という様な増加傾向を示す m の値に対応している。白石(1983)のプログラムを用いてこれらの n_1 の値に対応した(3.3.1)式と(3.3.2)式に示すR関数のパラメータを別々に計算した結果を表-4.5.1に示す。さらに7通りの n_1 の値に対応した個体密度の推定値を、チューリンのマツ収穫表地位1aを例にとりて示したものが表-4.5.2であるが、これらの推定値の間には大きな違いが認められない。なお、表-4.5.1と表-4.5.2の右端の覧には、 n_1 の値を仮定しなかった場合の計算結果が示してある。

7通りの n_1 の値に対応した N_* と w_* の値を地位毎に $\ln w_* - \ln N_*$ グラフ上に打点したものを図-4.5.1に示す。ある地位のパラメータ n_1 は図-4.5.1上の点(w_* , N_*)の軌跡と最多密度曲線との交点によって決定されるが、この場合の最多密度曲線のパラメータ K_* は不明である。最多密度曲線の傾きは $-3/2$ と仮定してあるので、 K_* に対していくつかの値を仮定して図-4.5.1に描いてある。図上である K_* の値の最多密度曲線に着目すれば、(w_* , N_*)の軌跡と最多密度曲線の交点によって与えられる n_1 の値は、地位の低下につれて一定の方向にずれる傾向が認められる。具体的な最多密度曲線式が不明なので確定的なことは言えないが、この傾向が地位の低下にともなって極端に進むと n_1 が負値をとることも予想される。その場合は $n_1 > 0$ という仮定に反することになり、 $n_1 < 0$, $n_2 > 0$ という条件下での $w-N$ trajectoryは只木の式とは反対に単調減少する凸関数の曲線となる。このような問題については今後実験的に検討がされなければならない。また今回の略算結果では地位の違いに応じて n_1 の値が変化し、地位を込みにした平均幹材積の成長関数のパラメータ n_1 に特定の定数を仮定することができない。しかし前述のように今回の略算法では他のパラメータ間の関係が考慮されていないので、地位とパラメータ n_1 の間に認められるこのような傾向は再検討する必要がある。

5章 $w-N$ 曲線

5.1 はじめに

篠崎ら(Shinozaki *et al.*: 1956)のロジスティック理論の展開においては競争密度効果の解析が最初に行われ、引き続いて自己間引き曲線や最多密度曲線との関係が論じられている。本論の林分成長モデルにおいては、第3章および第4章に見られるように自己間引き曲線($w-N$ trajectory)と最多密度曲線の解析が最初に行われた。本章においてはさらに競争密度効果の一般的解析を行い、前章までに示した林分成長モデル(D型とH型の $w-N$ trajectory)が競争密度効果という現象についての経験的知識をどのように説明できるかを検討し、本論における林分成長モデルの有効性と限界を明らかにする。

第5章では初めに競争密解効果式(本論における $w-N$ 曲線式)に関する既存の研究を簡単に振り返り、ついで本論における林分成長モデルの $w-N$ 曲線の一般式を誘導する。さらに $w-N$ 曲線の一般式の両対数グラフにおける曲線形と傾きを簡単に解析し、更に前章までに示した林分成長モデル(一部のD型とH型の $w-N$ trajectory)の場合の $w-N$ 曲線について詳しく検討する。ついで初期個体密度が与えられたとき、その林分の $w-N$ 曲線上での傾きが生育時間の経過に伴いどのように変化するかを検討する。最後に植栽密度方向や生育時間方向に調べられたこれらの $w-N$ 曲線の特性を、競争密度効果について知られる過去の知見に照らし合わせて本論の林分成長モデル(一部のD型とH型の $w-N$ trajectory)の有効性と限界を考察する。

5.2 $w-N$ 曲線に関する既往の研究

$w-N$ 曲線に関する研究としては、既に述べたように吉良や篠崎を始めとした大阪市大グループによる一連の研究があるが、多くの研究者がこの問題についての報告をしている。以後の記述に先立ち、平均個体重と個体密度をそれぞれ w と N で表すことにする。

Bleasdaleら(Bleasdale *et al.*: 1960)は論証方法においては篠崎らの研究と類似するが、logistic関数の代わりにR関数を用いることによって次式に示すような $w-N$ 曲線式を導いた。

$$\frac{1}{w^y} = A + BN^y \quad (5.2.1)$$

ここに A , B , y は定数で, y は通常 1 より小さい。(5.2.1) 式の誘導過程は省略されているためその詳細な内容は不明であるが, Nelder (1962) はその後上式を次のように定式化している。

$$\frac{1}{w^x} = A + BN^x \quad (5.2.2)$$

ここに, x , y , A は植栽方法に依存しない定数で B は植栽方法に依存する定数である。さらに Bleasdale (1966) によると, Nelder (未公刊) は $y < x$ の場合 (5.2.2) 式において最大なる平均個体重 (w_{max}) を与える個体密度 (N_{max}) が存在し, それらは次式で表されることを指摘した。

$$N_{max}^x = \frac{A}{B(x/y-1)} \quad (5.2.3)$$

$$w_{max}^y = \frac{A}{(1-y/x)} \quad (5.2.4)$$

Bleasdale (1966) の論文では (5.2.3) 式の右辺分母の B が分子に記載されているが, (5.2.3) 式と (5.2.4) 式の誘導過程は未公刊とされておりミスプリントと考えられる。その後, Bleasdale ら (1966) は x と y の絶対値よりもむしろ両者の比が実際の当てはめに影響を与えると指摘し, (5.2.2) ~ (5.2.4) 式において, $x=1$ とした場合の y の値を計算している。

一方, Yang ら (1981) は個体密度の代わりに CCF (crown competition factor) という概念を用い, 平均幹材積の成長が R 関数に従うことの他に二, 三の仮定を設けて次式を導いた。

$$w = (\alpha CCF^x + \beta)^y \quad (5.2.5)$$

ここに α と β は生育段階に依存する定数である。 x と y は報告の内容から判断すると生育段階に依存しない定数と考えられるが, 実際の資料への当てはめにおいては林齢によって一定値をとらず不明な点がある。CCF は葉面積指数 (LAI) と類似した概念である。Yang らの示した (5.2.5) 式は Bleasdale らの (5.2.2) 式と比較して, 個体密度の表現方法に違いがあるが関数形という点では同一

のものを見なすことができる。

また箕輪 (1982) は Khilmi の自己間引きモデルと Reineke の経験式 (または吉良らの 3/2 乗則) から log-Mitscherlich 式を誘導し, $w-N$ 曲線式として次式を誘導している。

$$wN^{a(t)} = K(t) \quad (5.2.6)$$

ここに $a(t)$, $K(t)$ は生育時間に依存する定数である。(5.2.6) 式は吉良らが示した (2.2.1) 式と同一の関数形をしており, $0 \leq a(t) \leq 1$ である。この式は個体密度が生育時間と共に変化しない静的な過程における $w-N$ 曲線式であるが, その後箕輪 (1983a) は個体密度が生育時間に伴って変化する動的過程における $w-N$ 曲線式として次式を誘導した。

$$wN^{A(t)} = F(t) \quad (5.2.7)$$

ここに $A(t)$, $F(t)$ は生育時間に依存する定数である。(5.2.6) 式と (5.2.7) 式は共に両対数グラフ上で直線を表すべき乗式であるが, その誘導過程は全く異なっており, (5.2.7) 式では最終収量一定則を仮定する必要がなく $0 \leq A(t) \leq \beta$ (β は両対数グラフにおける最多密度曲線の傾き) である。一方, 内藤 (1984b) は平均個体重の増加と個体密度の減少を R 関数で記述し, t 断面における $w-N$ 曲線の性質を様々な観点から調べている。その詳しい内容は次節以降で説明することとする。

既に第 2 章で述べた篠崎らの研究も含めて, 上述の研究を論理の流れという観点から整理すれば, 篠崎らは個体密度が生育時間と共に変化しない静的な過程において, $w-t$ 平面の成長曲線式 (logistic 曲線) と最終収量一定則 (充分時間の経過した $w-N$ 曲線式) から t 断面の一般式を導いたものと言えよう。また詳細な内容は不明であるが, Bleasdale らは $w-t$ 平面の成長曲線として R 関数を仮定し, $N-t$ 平面あるいは trajectory 平面に何らかの関係式を仮定して t 断面における一般式を導いたものと推測される。さらに箕輪の示した (5.2.7) 式は $w-t$ 平面と $N-t$ 平面の曲線式から t 断面の式を導いたものと考えられる。

以上述べたように, $w-t$ 平面, $N-t$ 平面, t 断面あるいは trajectory 平面上における曲線式の間には, 任意の二者が仮定されれば残りの曲線式が誘

導されるという関係がある。本論のモデルにおいては $w-t$ 平面と $N-t$ 平面の曲線式に R 関数を仮定して t 断面における $w-N$ 曲線式を誘導するものである。

5. 3 $w-N$ 曲線式とその傾き

$w-N$ trajectory の一般式は (3.3.1) 式と (3.3.2) 式から生育時間 t を消去することによって求められたが、 $w-N$ 曲線の一般式は以下に再掲する (3.3.1) 式～(3.3.3) 式から w_0 と N_0 を消去することによって求められる。

$$w = w_0 \{1 - B_1 \exp(-k_1 t)\}^{n_1} \quad (3.3.1)$$

$$N = N_0 \{1 - B_2 \exp(-k_2 t)\}^{n_2} \quad (3.3.2)$$

$$w_0 N_0^{r_0} = K_0, \quad (r_0, K_0 > 0) \quad (3.3.3)$$

(3.3.1) 式と (3.3.2) 式において $t = 0$ とすれば、 w_0 と N_0 はそれぞれ次のように表現される。

$$w_0 = w_0 (1 - B_1)^{n_1} \quad (5.3.1)$$

$$N_0 = N_0 (1 - B_2)^{n_2} \quad (5.3.2)$$

また (3.3.1) 式と (3.3.2) 式を B_1 と B_2 について解けば、 B_1 と B_2 はそれぞれ次式で表される。

$$B_1 = \left\{1 - \left(\frac{w}{w_0}\right)^{1/n_1}\right\} \exp(k_1 t) \quad (5.3.3)$$

$$B_2 = \left\{1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/n_2}\right\} \exp(k_2 t) \quad (5.3.4)$$

(5.3.1) 式と (5.3.2) 式を (3.3.3) 式に代入して w_0 と N_0 を消去し、さらに (5.3.3) 式と (5.3.4) 式を代入して B_1 と B_2 を消去すれば、次式に示す $w-N$ 曲線の一般式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{w_0 N_0^{r_0}}{K_0} \left[1 - \left\{1 - \left(\frac{w}{w_0}\right)^{1/n_1}\right\} \exp(k_1 t)\right]^{n_1} \\ & = \left[1 - \left\{1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/n_2}\right\} \exp(k_2 t)\right]^{-n_2 r_0} \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

さらに、 w と N はそれぞれ B_1 と B_2 の関数と考えられ、 B_1 と B_2 はそれぞれ w_0 と N_0 の関数と考えられ、 w_0 と N_0 の間には (3.3.3) 式に示す関係が仮定されているので、両対数グラフにおける $w-N$ 曲線の傾きは一般に次式で与えられる。

$$\frac{d \ln w}{d \ln N} = \frac{N}{w} \frac{dw}{dB_1} \frac{dB_1}{dB_2} \frac{dB_2}{dN} \quad (5.3.6)$$

ところで、(5.3.1) 式と (5.3.2) 式を (3.3.3) 式に代入すると B_1 と B_2 の間には次式に示す関係が成立するので、 dB_1/dB_2 は (5.3.7) 式のように求められる。

$$B_1 = 1 - \left(\frac{K_0}{w_0 N_0^{r_0}}\right)^{1/n_1} \cdot (1 - B_2)^{-n_2 r_0 / n_1}$$

$$\frac{dB_1}{dB_2} = \frac{-n_2 r_0 (1 - B_1)}{n_1 (1 - B_2)} \quad (5.3.7)$$

また、 dw/dB_1 と dN/dB_2 は (3.3.1) 式と (3.3.2) 式をそれぞれ B_1 と B_2 で微分することによって次式のように求められる。

$$\frac{dw}{dB_1} = \frac{-w n_1 \exp(-k_1 t)}{1 - B_1 \exp(-k_1 t)} \quad (5.3.8)$$

$$\frac{dN}{dB_2} = \frac{-N n_2 \exp(-k_2 t)}{1 - B_2 \exp(-k_2 t)} \quad (5.3.9)$$

従って (5.3.7) 式～(5.3.9) 式を (5.3.6) 式に代入して整理すれば、両対数グラフにおける $w-N$ 曲線の傾きを表す (5.3.6) 式は次式のように変形される。

$$\frac{d \ln w}{d \ln N} = -r_0 \exp\{(k_2 - k_1)t\} \left(\frac{w_0}{w}\right)^{1/n_1} \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/n_2} \quad (5.3.10)$$

または

$$= \frac{-r_0 \exp\{(k_2 - k_1)t\} (1 - B_1) \{1 - B_2 \exp(-k_2 t)\}}{(1 - B_2) \{1 - B_1 \exp(-k_1 t)\}}$$

(5.3.10) 式右辺各項は $-r_0$ を除いて正であるから、両対数グラフにおける $w-N$ 曲線は常に負の傾きをもつことになり、このことは今まで知られている経験的知識と矛盾しない。また、(5.3.10) 式において $t = 0$ とすれば右辺は $-r_0$ となり、(3.3.3) 式に示される仮定とも矛盾しない。

第 3 章において $w-N$ trajectory の一般式の曲線形をパラメータの符号という観点から考察したが、次節において (5.3.5) 式に示される $w-N$ 曲線の一般式が両対数グラフでどのような曲線形を表現できるかを検討する。

5. 4 $w-N$ 曲線の曲線形

前章の考察によって $w-N$ 曲線は両対数グラフ

上で常に負の傾きをもつことが明かとなったが、個体密度方向の傾きの変化を調べるために (5.3.10) 式を $\ln N$ でもう一度微分すれば次式を得る。

$$\frac{d^2 \ln w}{d \ln N^2} = -r_0 \exp\{(k_2 - k_1)t\} N \frac{d(fg)}{dN} \quad (5.4.1)$$

$$\text{ここに, } f = \frac{(1 - B_1)}{1 - B_1 \exp(-k_1 t)} \quad (5.4.2)$$

$$g = \frac{1 - B_2 \exp(-k_2 t)}{(1 - B_2)} \quad (5.4.3)$$

$$\frac{d(fg)}{dN} = \frac{df}{dN} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dN} \quad (5.4.4)$$

である。

(5.4.2) 式を B_1 で微分すれば (5.4.5) 式を得、(5.3.7), (5.3.9), (5.4.5) 式より df/dN は (5.4.6) 式のように求められる。

$$\frac{df}{dB_1} = \frac{-f^2 \{1 - \exp(-k_1 t)\}}{(1 - B_1)^2} \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dN} &= \frac{df}{dB_1} \frac{dB_1}{dN} + \frac{dB_2}{dN} \\ &= \frac{-r_0 \{1 - \exp(-k_1 t)\} f^2 g}{mN(1 - B_1) \exp(-k_1 t)} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

同様に (5.4.3) 式を B_2 で微分すれば (5.4.7) 式を得、(5.3.9), (5.4.7) 式より dg/dN は (5.4.8) 式のように求められる。

$$\frac{dg}{dB_2} = \frac{1 - \exp(-k_2 t)}{(1 - B_2)^2} \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dN} &= \frac{dg}{dB_2} \frac{dB_2}{dN} \\ &= \frac{-g \{1 - \exp(-k_2 t)\}}{n_2 N (1 - B_2) \exp(-k_2 t)} \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

従って (5.4.4), (5.4.6), (5.4.8) 式を (5.4.1) 式に代入して整理すれば (5.4.9) 式を得る。

$$\frac{d^2 \ln w}{d \ln N^2} = \frac{fgr_0 \exp\{(k_2 - k_1)t\}}{n_1 n_2 (1 - B_2) \exp(-k_2 t)} D(B_1, B_2; t) \quad (5.4.9)$$

ここに $D(B_1, B_2; t)$ は次式で表されるものとする。

$$\begin{aligned} D(B_1, B_2; t) &= n_1 \{1 - \exp(-k_1 t)\} \\ &+ n_2 r_0 \{1 - \exp(-k_2 t)\} \frac{1 - B_2 \exp(-k_2 t)}{1 - B_1 \exp(-k_1 t)} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

n_1 と n_2 が同符号の場合、(5.4.9) 式において $D(B_1, B_2; t)$ を除く右辺各項の積の符号は正となるので、 $d^2 \ln w / d \ln N^2$ の符号は $D(B_1, B_2; t)$ の符号と一致する。(5.4.10) 式より n_1 と n_2 が共に正の場合は $D(B_1, B_2; t)$ の符号も正となり、両対数グラフにおける $w-N$ 曲線は単調減少する凸関数の曲線形を呈する。また n_1 と n_2 が共に負の場合は $D(B_1, B_2; t)$ の符号も負となり、 $w-N$ 曲線は単調減少する凹関数の曲線形を呈する。

n_1 と n_2 が異符号の場合、(5.4.9) 式において $D(B_1, B_2; t)$ を除く右辺各項の積の符号は負となるので、 $d^2 \ln w / d \ln N^2$ の符号は $D(B_1, B_2; t)$ の符号と逆転する。(5.4.10) 式において $D(B_1, B_2; t)$ は、 k_1 と k_2 , n_1 と $n_2 r_0$, B_1 と B_2 の大小関係によってその符号を変える場合があり、そのとき両対数グラフにおける $w-N$ 曲線は変曲点をもつ。 n_1 と n_2 が異符号である場合の $w-N$ 曲線の曲線形について一般的考察を行うのは複雑で記述が長くなるため、第4章2節で改良した林分成長モデルの $w-N$ 曲線の曲線形についてさらに詳しく考察する。改良されたモデルには新たにパラメータに関する次のような条件が仮定されていた。

$$n_1 > 0, n_2 < 0 \quad (5.4.11)$$

$$k_1 = k_2 = k \quad (5.4.12)$$

$$wN^{\circ} > K_0 \quad (5.4.13)$$

(5.4.12) 式の仮定によって (5.4.10) 式に示される $D(B_1, B_2; t)$ は次式のように変形される。

$$D(B_1, B_2; t) = \{1 - \exp(-kt)\} \{n_1 + n_2 r_0 E(B_1, B_2; t)\} \quad (5.4.14)$$

ただし、

$$E(B_1, B_2; t) = \frac{1 - B_2 \exp(-kt)}{1 - B_1 \exp(-kt)} \quad (5.4.15)$$

である。

(5.4.14) 式において $\{1 - \exp(-kt)\} \geq 0$ であるから、 $D(B_1, B_2; t)$ の符号は n_1 と $n_2 r_0$ の大小関係

および $E(B_1, B_2; t)$ の値によって変化する。さらに $E(B_1, B_2; t)$ の値は t をパラメータと考えれば B_1 と B_2 の大小関係で変化する。第3章5節で述べたように $(B_1 - B_2)$ は (3.5.9) 式のように表現され、(5.4.11), (5.4.13) 式の仮定により $n_1 + n_2 r_0 \leq 0$ の場合は常に $B_1 > B_2$ が成立し、 $n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合は N_0 の値によって $B_1 > B_2$ ($N_d > N_0 \geq N_*$), $B_2 \geq B_1$ ($N_0 \geq N_d$) が成立した。以下に (3.5.9) 式と N_d の定義式を再掲しておく。

$$B_1 - B_2 = \left(\frac{N_*}{N_0}\right)^{n_1/n_1} \left\{ \left(\frac{N_0}{N_*}\right)^{(n_1 + n_2 r_0)/n_1 n_2} - \left(\frac{K_0}{w N_* N_0}\right)^{1/n_1} \right\} \quad (3.5.9)$$

$$N_d = N_* \left\{ \left(\frac{K_0}{w N_* N_0}\right)^{1/n_1} \right\}^{n_1 n_2 / (n_1 + n_2 r_0)} \quad (3.5.10)$$

従って $n_1 + n_2 r_0 \leq 0$ の場合は常に $B_1 > B_2 > 0$ が成立するので、(5.4.15) 式に示される $E(B_1, B_2; t)$ は常に 1 より大きくなり、 $n_1 > 0, n_2 r_0 < 0$ であることから (5.4.14) 式に示される $D(B_1, B_2; t)$ の符号は常に負となることが分かる。 $D(B_1, B_2; t)$ の符号が負となるので $d^2 \ln w / d \ln N^2$ の符号は正となり、両対数グラフ上での $w-N$ 曲線の形は単調減少する凸関数の曲線形となる。

また $n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合は $N_0 \geq N_d$ となる範囲で常に $B_2 \geq B_1 > 0$ が成立し、(5.4.15) 式より $1 \geq E(B_1, B_2; t) > 0$ が常に成立する。 $n_1 > 0, n_2 r_0 < 0$ であることから (5.4.14) 式に示される $D(B_1, B_2; t)$ の符号は常に正となり、その結果 $d^2 \ln w / d \ln N^2$ の符号は常に負となる。従って両対数グラフ上での $w-N$ 曲線の形は $N_0 \geq N_d$ なる範囲で常に単調減少する凹関数の曲線形となる。

さらに $n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合は $N_d > N_0 \geq N_*$ なる範囲で常に $B_1 > B_2 > 0$ が成立するので、(5.4.15) 式に示される $E(B_1, B_2; t)$ は常に 1 より大きくなる。 $n_1 > 0, n_2 r_0 < 0$ であることから (5.4.14) 式に示される $D(B_1, B_2; t)$ の符号は $E(B_1, B_2; t)$ と $|n_1 / (n_2 r_0)|$ の大小関係で正 ($E(B_1, B_2; t) < |n_1 / (n_2 r_0)|$) または負 ($E(B_1, B_2; t) > |n_1 / (n_2 r_0)|$) となる。そこで次に N_0 の変化にともなった $E(B_1, B_2; t)$ の値の変化を調べる。

N_0 と B_2 の間には (5.3.2) 式に示す関係があるので dN_0 / dB_2 は (5.4.16) 式のように求められ、(5.4.16), (5.3.7) 式を用いて dN_0 / dB_1 は (5.4.17) 式のように求められる。

$$dN_0 / dB_2 = -n_2 N_0 / (1 - B_2) \quad (5.4.16)$$

$$\begin{aligned} dN_0 / dB_1 &= (dN_0 / dB_2) (dB_2 / dB_1) \\ &= n_1 N_0 / \{n_1 (1 - B_1)\} \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

従って (5.4.15) 式を N_0 で微分すれば、 dE / dN_0 は (5.4.16), (5.4.17) 式を用いて次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dN_0} &= \frac{(1 - B_2) \{1 - B_1 \exp(-kt)\} \exp(-kt)}{n_1 n_2 N_0 \{1 - B_1 \exp(-kt)\}^2} \\ &\times \left[n_1 + n_2 r_0 \frac{(1 - B_1) \{1 - B_2 \exp(-kt)\}}{(1 - B_2) \{1 - B_1 \exp(-kt)\}} \right] \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

(5.4.18) 式下段の大括弧の中を除く各項の積の符号は常に負であり、 dE / dN_0 の符号は大括弧の中の符号と逆転する。 $N_d > N_0 \geq N_*$ なる範囲では前述のように常に $B_1 > B_2 > 0$ が成立しており、 $(1 - B_1) / (1 - B_2)$ と $\{1 - B_1 \exp(-kt)\} / \{1 - B_2 \exp(-kt)\}$ は常に 1 より小さな正の値をとる。しかし $t \geq 0$ において $1 \geq \exp(-kt) > 0$ であるから両者の間には常に

$$\{1 - B_1 \exp(-kt)\} / \{1 - B_2 \exp(-kt)\} \geq (1 - B_1) / (1 - B_2)$$

という関係が成立している。

従って (5.4.18) 式下段中括弧の中は常に 1 より対さい値をとり、 $n_1 > 0, n_2 r_0 < 0, n_1 + n_2 r_0 > 0$ であることから下段大括弧の中は常に正の値をとり、 dE / dN_0 の符号は $N_d > N_0 \geq N_*$ なる範囲で常に負となる。このとき $E(B_1, B_2; t)$ は N_0 の増加に伴って単調に減少し、 $N_0 = N_*$ において最大値 E_{max} をとる。

$N_0 \rightarrow N_*$ としたときの B_1 と B_2 の値は (3.3.3), (5.3.1), (5.3.2) 式より次式のように求められ、そのとき E_{max} は (5.4.15), (5.4.19), (5.4.20) 式より (5.4.21) 式のように求められる。

$$\lim_{N_0 \rightarrow N_*} B_1 = 1 - \{K_0 / (w N_* N_0)\}^{1/n_1} \quad (5.4.19)$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow N_*} B_2 = 0 \quad (5.4.20)$$

$$E_{max}(t) = [1 - \{1 - \left(\frac{K_0}{w N_* N_0}\right)^{1/n_1} \} \exp(-kt)]^j \quad (5.4.21)$$

w - N 曲線は t 断面上の曲線であり、これまでの議論において生育時間 t はパラメータとして考えられてきたが、生育時間の経過にともなう t 断面での E_{max} を考えれば、(5.4.21)式に示すように E_{max} は生育時間 t の関数と見なされる。 $\exp(-kt)$ は生育時間 t の増加にともなう単調にその値を減少させるので、 $t=0$ において E_{max} は(5.4.22)式に示す最大値をとり、 t の増加に伴って E_{max} は単調に減少する。

$$E_{max}(0) = (w_0 N_0^{r_0} / K_0)^{1/n_1} \quad (5.4.22)$$

従って、(5.4.22)式に示す E_{max} の値が $|n_1 / (n_2 r_0)|$ より小さければ、前述のように(5.4.14)式で示される $D(B_1, B_2; t)$ の符号は常に正となり、 $d^2 \ln w / d \ln N^2$ の符号は $D(B_1, B_2; t)$ の符号と逆転して常に負となる。このとき両対数グラフにおける w - N 曲線の形は $N_d > N_0 \geq N_*$ なる範囲で単調減少する凹関数の曲線形となる。

また、 E_{max} の値が $|n_1 / (n_2 r_0)|$ より大きければ、 $E_{max}(t) > |n_1 / (n_2 r_0)|$ を成立させる t 断面において $E(B_1, B_2; t) > |n_1 / (n_2 r_0)|$ を成立させる N_0 ($N_d > N_0 \geq N_*$)の領域が存在し、その領域内で w - N 曲線の形は単調減少する凸関数の曲線形となる。このとき両対数グラフにおける w - N 曲線の形は N_0 ($N_d > N_0 \geq N_*$)の増加にともなう単調減少する凸関数の曲線形から凹関数の曲線形へと変化する。またこの場合、 $E_{max}(t) > |n_1 / (n_2 r_0)|$ を成立させる t ($t \geq 0$)は(5.4.21)より次に示す不等式を満足していなければならない。

$$t < \frac{1}{k} \ln \left\{ \frac{1 - (K_0 / w_0 N_0^{r_0})^{1/n_1}}{1 - |n_2 r_0 / n_1|} \right\} \quad (5.4.23)$$

以上、(5.4.11) ~ (5.4.13)式に示す条件を満足する w - N 曲線の両対数グラフ上での曲線形について考察してきたが、その結果を要約すれば以下に述べるとおりである。

$n_1 + n_2 r_0 \leq 0$ の場合、両対数グラフにおける w - N 曲線は単調減少する凸関数の曲線形を呈する。

$n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合、(5.4.23)式に示す条件を満足する t ($t \geq 0$)が存在するとき両対数グラフにおける w - N 曲線は変曲点をもち、 N_0 ($N_d > N_0 \geq N_*$)の増加に伴って単調減少する凸関数の曲線

形から凹関数の曲線形に変化する。(5.4.23)式を満足する t ($t \geq 0$)が存在しないとき、両対数グラフにおける w - N 曲線は常に単調減少する凹関数の曲線形を呈する。

現実には観察される w - N 曲線は、多くの場合篠崎らのC-D効果の逆数式に見られるように単調減少する凹関数の曲線形をしているが、本論の林分成長モデルの場合も条件によっては同じ傾向を示す曲線形を表すことが明かとなった。さらに条件によっては変曲点をもつ w - N 曲線の存在が予測されるが、このような w - N 曲線の存在については今後の実験を待たなければならない。

5.5 生育時間の経過に伴った w - N 曲線の傾き

第5章3節および4節においては、ある t 断面における w - N 曲線の傾きとその曲線形についての考察を行ったが、本節では生育時間の経過にともなう w - N 曲線の傾きの変化について若干の考察を行う。

(3.3.3)式において初期個体密度 N_0 の値を指定すれば初期平均個体重 w_0 の値も一意的に定まり、(5.3.1)式と(5.3.2)式の関係から B_1 と B_2 の値も一意的に定まる。従ってある初期個体密度をもった林分の、任意の t 断面における w - N 曲線上での傾き(両対数グラフ)を $F(t)$ で表すことにすれば、(5.3.10)式と(5.4.12)式から $F(t)$ は(5.5.1)式で表され、 $t \rightarrow \infty$ とした場合の傾き $F(\infty)$ は(5.5.2)式で表される。

$$F(t) = -r_0 \frac{(1-B_1)\{1-B_2 \exp(-kt)\}}{(1-B_2)\{1-B_1 \exp(-kt)\}} \quad (5.5.1)$$

$$F(\infty) = -r_0 \frac{(1-B_1)}{(1-B_2)} \quad (5.5.2)$$

さらに生育時間 t の増加にともなう傾きの変化を調べるために $F(t)$ を t で微分すれば次式を得る。

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-r_0(1-B_1)k \exp(-kt)(B_2 - B_1)}{(1-B_2)\{1-B_1 \exp(-kt)\}^2} \quad (5.5.3)$$

(5.5.3)式右辺において $(B_2 - B_1)$ を除く各項の積の符号は負であるから $dF(t)/dt$ の符号は $(B_2 - B_1)$ の符号と逆転する。前節でも述べたように、 $n_1 > 0$ 、 $n_2 < 0$ としたときの B_1 と B_2 の大小関係は $(n_1 + n_2 r_0)$ の符号によって定まり、 $n_1 + n_2 r_0 \leq 0$ の場

合は常に $B_1 > B_2$ が成立し、 $n_1 + n_2 r_0 > 0$ の場合は N_0 の条件によって、 $B_1 > B_2$ ($N_d > N_0 \geq N_*$) または $B_2 \geq B_1$ ($N_0 \geq N_d$) が成立する。

従って、 $n_1 + n_2 r_0 \leq 0$ の場合や $n_1 + n_2 r_0 > 0$ で $N_d > N_0 \geq N_*$ の場合は $(B_2 - B_1)$ が常に負となるので、 $dF(t)/dt$ は常に正となり $F(t)$ は生育時間の経過とともに増加するが、 $F(t)$ は常に負の値をとるので傾きは徐々に緩やかになる。

また、 $n_1 + n_2 r_0 > 0$ で $N_0 \geq N_d$ の場合は $(B_2 - B_1)$ が常に正となるので、 $dF(t)/dt$ は常に正となり $F(t)$ は生育時間の経過とともに減少するが、 $F(t)$ は常に負の値をとるので傾きは徐々に急になる。

現実に観察される $w-N$ 曲線の傾きの変化は、多くの場合、生育段階が進むにつれて徐々に急になり、ある生育段階を過ぎれば植栽密度と無関係に一定の値(多くの場合-1前後の値)をとることが知られている。

本論の林分成長モデルにおける $w-N$ 曲線のうち、生育時間の経過とともにその傾きが徐々に急になるのは、 $n_1 + n_2 r_0 > 0$ で $N_0 \geq N_d$ という条件のもとでの $w-N$ 曲線だけであるが、その傾きは $t \rightarrow \infty$ とした場合(5.5.2)式に示されるように初期体密度によって異なった値をとり、現実に観察される $w-N$ 曲線の特徴と一致しない。さらに $n_1 + n_2 r_0 > 0$ で $N_0 \geq N_d$ という条件のもので $w-N$ trajectoryは第3章5節で述べたようにH型となり、両対数グラフ上での $w-N$ trajectoryは常に凸関数の曲線形を示すが、このことも現実に観察される自己間引き曲線に関する過去の知見と一致しない。

以上の考察の結果、第4章で改良されたR関数に基づく林分成長モデルは、最多密度曲線の解釈も含めて自己間引き現象を統一的に説明できるという点においてそれなりの成果をあげたが、競争密度効果に関する過去の知見をうまく説明できないという限界のあることが明かとなった。

終章 まとめと今後の課題

G関数やW関数およびR関数は現実の測定資料を記述する上で柔軟性をもちまた相対成長等の数式変換に対してその関数形を保存するという性質をもっているため、多くの研究者がこれらの関数を林分成長解析に利用しているがこれらの関数の相互関係は明確でなかった。

第1章ではパラメータに関する制約条件を拡張することによってW関数が更に広範な分布曲線群を表現できることを示した。四手井(1956)によれば、一斉同齡人工林の樹高分布のモードは生育時間の経過に伴って樹高の高い方へ移動する傾向を示すが、拡張されたW関数は極端にモードが偏った分布をも表現できるので、そのような樹高分布曲線を表現できる可能性をもっている。次に林分成長解析に多く用いられているG関数やW関数およびR関数の相互関係を極値統計学の立場から分析し、これらの関数が標本極値の分布関数として導かれるという共通の背景をもつことを明らかにした。さらに林分の成長現象を単純な一つの多重システムとして捉えるならば、林分成長にかかわる成長関数や分布関数がこれらの標本極値の分布関数で表現される可能性を指摘した。

ところで胸高直径や樹高の分布関数としてW関数などが多く用いられているが、ある生育段階 t における胸高直径 x の分布(確率密度関数)が以下に示す(1)式で表現されるとすれば、生育段階 t における胸高直径 x の期待値(平均値)は(2)式で与えられる。

$$Y=f\{x: \theta(t), i=1, m\} \quad (1)$$

$$E(x)=\int xf(x) dx=g(t) \quad (2)$$

ここに $\{\theta_i(t), i=1, m\}$ は分布関数のパラメータであり、生育時間 t の関数である。(2)式は x の期待値の定義式そのものであるが同時に x の成長関数そのものでもあり、ある個体の大きさの分布とその平均値の成長関数との間には恒等的に(2)式に示す関係が成立しなければならない。個体の大きさの分布とその平均値(あるいは個体)の成長を同時に扱った研究は、鈴木(1979)、末田(Sweda: 1972)、竹内ら(1974)、箕輪(1984)などに見られ、竹内らはある条件のもとにPoisson分布や2項分布とMitscherlich成長関数との対応、幾何分布と2重指数成長関数との対応を論じている。R関数、W関数、G関数はそれぞれ個体の大きさの分布関数あるいはその平均値(または個体)の成長関数としてしばしば用いられてきているが、(2)式に示す分布関数と成長関数の関係を考慮した場合、これらの成長関数と分布関数がお互いにどのような対応関係となるかという問題は非常に興味深い今後の課題である。

第3章以降では林分の成長を生育時間、個体密度、平均個体重を各々の軸とする三次元直交座標系における点の軌跡として捉え、個体密度の減少曲線と平均個体重の成長曲線にR関数を仮定した林分成長モデルを用いて自己間引き現象や最多密度曲線、競争密度効果に関する理論的考察を行った。

第3章ではR関数の曲線形をそのパラメータの符号という観点から解析し、R関数を8種類の型に分類してその曲線の特性を明らかにした。また、個体密度の減少曲線と平均個体重の成長曲線にR関数を仮定した林分成長モデルを提案し、仮定された二つのR関数から生育時間 t を消去することによって $w-N$ trajectoryの一般式を誘導し、両対数グラフ上での $w-N$ trajectoryの曲線形を分析して $w-N$ trajectoryを11種類の型に分類した。

第4章では $w-N$ trajectoryの一般式の曲線形を自己間引き現象に関する過去の知見と照らし合わせ、第3章で提案した林分成長モデルをさらに具体的なモデルへ改良し、D型とH型($N_d > N_0 \geq N_*$)の $w-N$ trajectoryが最多密度曲線も含めて自己間引き現象を統一的に説明できることを明らかにした。本論における最多密度の理解は一つの新しい提案であろう。

第5章では t 断面における $w-N$ 曲線の一般式を林分成長モデルから導いて両対数グラフ上での $w-N$ 曲線の曲線形を解析し、D型とH型の $w-N$ trajectoryに対応した $w-N$ 曲線は単調減少する凹関数の曲線や凸関数の曲線もしくは両者が結合された曲線を表現できることを示した。さらに競争密度効果に関する過去の知見と本論における林分成長モデルの $w-N$ 曲線との比較を行った結果、自己間引き現象を統一的に説明することができたD型とH型の $w-N$ trajectoryに対応する $w-N$ 曲線には以下に述べるような問題が在ることを指摘した。

篠崎らの示したC-D効果の逆数式は常に両対数グラフ上で単調減少する凹関数の曲線形を示し、箕輪の誘導した競争密度効果式は両対数グラフ上で常に直線を表す。現実の資料において $w-N$ 曲線は一般に単調減少する凹関数の曲線または直線となる例が多く報告されており、本論の $w-N$ 曲線の一つである単調減少する凸関数の曲線形をした $w-N$ 曲線は一般的に現実的でないと考えられる。

ところで佐藤ら(1955)は若いアカマツ林の資料

を用いてベキ乗式で表される競争密度効果式を示しているが、そのグラフをよく観察するとグラフ上の4個の点は単調減少する凸関数の曲線の上にも見なされる。また宇都宮大学船生演習林に設定されているスギの密度効果試験林の資料(井出靖:宇都宮大学農学部附属船生演習林における17年生スギ林分の密度効果に関する研究,宇大修論,1982)には明らかに単調減少する凸関数の曲線形を示す例も見受けられる。これらのことは、 $w-N$ 曲線が篠崎らの逆数式や箕輪のベキ乗式のような曲線や直線で表現されとは限らないことを意味し、本論におけるような研究の必要性を裏付けるものと考えられる。

一方、生育時間の経過にともなった $w-N$ 曲線の傾きは徐々に急になっていくことが経験的に知られており、篠崎ら(Shinozaki *et al.*: 1956)や箕輪(1983a)のモデルの場合、 $t \rightarrow \infty$ としたときの傾きはそれぞれ $-1, -3/2$ となる。本論におけるモデルの場合、 $t \rightarrow \infty$ としたときの $w-N$ 曲線の傾きは条件により増加あるいは減少しながら(5.5.2)式に示される値に近づく。本論のモデルは生育時間の経過にともなった $w-N$ 曲線の傾きについて経験的に知られている事実を矛盾なく説明することが不可能である。

本論の論旨展開は第3章において広い自由度をもつ一般的な形で林分成長モデルを構築し、引き続き第4章で自己間引き現象と最多密度曲線について経験的に知られている過去の知見に基づき林分成長モデルの改良(条件の付加)を行うという構成であった。その結果、 $w-N$ trajectoryが只木の式に見られるような単調減少する凹関数の曲線形となり、 $N_0 \rightarrow \infty$ (または $N_0 \rightarrow N_d$)とした場合の傾きが $-3/2$ 前後の一定の値をとるためには、 $n_1 + n_2 r_0 \leq 0$, $n_2 > 0$, $n_2 < 0$, $k_1 = k_2$ であるD型、もしくは $n_1 + n_2 r_0 > 0$, $n_1 > 0$, $n_2 < 0$, $k_1 = k_2$ であるH型($N_d > N_0 \geq N_*$)の $w-N$ trajectoryが要求された。しかしこの型の $w-N$ trajectoryに対応する $w-N$ 曲線は前述のような限界をもち、これらと比較して競争密度効果をより良く説明できそうな $w-N$ 曲線に対応するH型($N_0 > N_d$)の $w-N$ trajectoryは、反対に自己間引き現象に関する過去の知見(単調減少する凹関数の曲線形)をうまく説明できなかつた。このことは本論における林分成長モデルを用いた林分成長解析の限界を意味するものであろう。その原因をいくつか考えてみたい。

篠崎らはロジステック理論の展開において、成長関数のパラメータが生育時間の関数で表現されるという観点から、logistic曲線を単純、 λ 型、 N 型および λN 型(一般)logistic曲線に分類している。また最終収量一定則を仮定し、異なる植栽密度に対応した平均個体重と個体密度の極限値を座標とする点は、両対数軸上の w - N trajectory平面において一本の直線上に並ぶと考えた。

一方、本論の林分成長モデルの R 関数では、すべてのパラメータが生育時間や初期個体密度と無関係に定数と仮定されており、その意味において篠崎らの単純logistic曲線と対比されよう。しかし、 R 関数のパラメータが生育時間や初期個体密度の関数で表現されるべきものである可能性もあり、これが本論における林分成長モデルの限界の原因であるかもしれない。

また第4章で林分成長モデルに付加された仮定は、 w - N trajectoryと只木の式や最多密度曲線とを比較検討の結果導かれたものであるが、現実の自己間引き曲線が両対数グラフ上で常に単調減少する凹関数の曲線形で表現され得るかということも、実験をとおして再検討されなければならない。さらに R 関数のパラメータ w_* 、 N_* と関連して、最多密度曲線の解釈についても再検討の必要があると考える。最多密度曲線には、ある t 断面において個体密度を増加させた場合の w - N 曲線の存在限界を表す境界条件を示すという理解の他に、ある林分が満度な密度状態になった場合の成長の軌跡(w - N trajectory)を表すという理解がある。初期個体密度が異なる以外は全く同一な生育条件で放置された林分が、生育の最終段階で同一の極限個体密度と極限平均個体重に到達でき得るかという点について、現在我々は確たる実験的裏付けを手にすることができない。篠崎らの当初の静的な成長モデルと同様に、極限個体密度と極限平均個体重が共に初期個体密度の関数と考えれば、本論の林分成長モデルとは違った成長モデルが導かれよう。

また、(3.3.3)式に示される仮定3であるが、初期個体密度 N_0 が極限個体密度 N_* と同じ値をもつ林分においても成長上の競争が生じている生育段階は、かなり時間の経過した段階と想像され、現実に林業の営まれる生育段階においてこのような仮定が妥当であるかは再検討されなければならないであろう。

さらに林分の成長現象にはさまざまな捉え方があり、本論のような三次元直交座標系における点の軌跡としての捉え方の他に、箕輪(1984)のような林木の個体分布の経時変化といった捉え方や、小林(1978)のような単木の胸高直径と樹高の相対成長と占有面積の経時変化といった捉え方などがある。林分成長解析にはこのような多くの側面からの検討が必要であり、さまざまな成長現象の断面に関する経験的知識の蓄積も必要である。

また、本論の林分成長モデルは無間伐林分に対して考えられたものであり、間伐を伴った林分成長については何も論じられていない。林業の現場への応用という意味では、無間伐林分成長モデルを間伐林分成長モデルにまで発展させて初めて現実的意義をもった研究となる。間伐林分成長モデルの研究例としては、Pienaarら(1973)、小林(1978)、白石(1985)、伊藤(1986)、阿部(1989)を始めとして多くのモデルが挙げられるが、どのような間伐林分成長モデルであろうと最多密度曲線を含めた自己間引き現象や競争密度効果則に関する過去の知見を説明できるものでなければならぬと著者は考えている。その意味では本論における林分成長モデルは第5章で述べたように競争密度効果則を十分に説明できないという限界をもっており、本論のモデルを間伐林分成長モデルへと発展させる前に解決しなければならない問題が残されている。この問題を解決して無間伐林分成長モデルを間伐林分成長モデルにまで発展させることが今後の課題である。

(1991年6月29日受理)

引用文献

- 阿部信行 1989 : トドマツ人工林間伐の体系化に関する基礎的研究, 北海道林試研報, 26 : 1-95
- 相場芳憲 1975a : スギ人工林の生長におよぼす保育の影響 (I) 収穫表における密度管理の検討, 日林誌, 57(1) : 1-5
- 1975b : スギ人工林の生長におよぼす保育の影響 (II) 現実林分密度における現存幹材積一定の傾向, 日林誌, 57(2) : 39-44
- 1975c : スギ人工林の生長におよぼす保育の影響 (III) 現実密度林分の現存幹材積の推定, 日林誌, 57(3) : 67-73
- 安藤 貴 1962 : アカマツ天然生除伐試験林の解析 第II報-本数密度を中心とした解析, 林試研報, 147 : 45-77
- 1968 : 同齡単純林の密度管理に関する生態学的研究, 林試研報, 210 : 1-153
- 坂口勝美・成田忠範・佐藤昭敏 1962 : アカマツ天然生除伐試験林の解析第I報, 林試研報, 144 : 1-30
- Bailey, R.L. & Dell, T.R. 1973 : Quantifying diameter distributions with the Weibull function, *Forest Science*, 19(2) : 97-104
- Bertalanffy, L. von 1949 : Problems of organic growth, *Nature*, 163 : 156-158
- Bleasdale, J.K.A. 1966 : The effects of plant spacing on the field of bulb onions (*Allium cepa* L.) grown from seed, *Jour. Hort. Sci.*, 41 : 145-153
- & Nelder, J.A. 1960 : Plant population and crop yield, *Nature*, 188 : 342
- & Thompson, R. 1966 : The effects of plant density and the pattern of plant arrangement on the yield of parsnips, *Jour. Hort. Sci.*, 41 : 371-378
- Deming, W.E. 1946 : Statistical adjustment of data, John Wiley & Sons, New York, (森口繁一訳 1950 : 推計学によるデータのまとめ方, 岩波書店, 東京, 198pp)
- Fisher, R.A. & Tippett, L.H.C. 1928 : Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 24 : 180-190
- Garcia, O. 1983 : A stochastic differential equation model for the height growth of forest stand, *Biometrics*, 39 : 1059-1072
- Gompertz, B. 1825 : On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a mode of determining the value of life contingencies, *Trans. of the Royal Soc. of London*, XXV Part 1 : 513-585
- Gumble, E.J. 1958 : Statistics of extremes, Columbia University Press, New York, 375pp
- 穂積和夫 1973 : 植物の相互作用, 共立出版, 東京, 124pp
- Hozumi, K. 1977 : Ecological and mathematical consideration on self-thinning in even-aged pure stands (I) Mean plant-weight density trajectory during the course of self-thinning, *Bot. Mag., Tokyo*, 90 : 165-179
- 1980 : Ecological and mathematical consideration of self-thinning in even-aged pure stands (II) Growth analysis of self-thinning, *Bot. Mag., Tokyo*, 93 : 149-166
- 1983 : Ecological and mathematical consideration on self-thinning in even-aged pure stands (III) Effect of the linear growth factor on self-thinning and its model, *Bot. Mag., Tokyo*, 96 : 171-191
- , Asahira, T. & Kira, T. 1956 : Intraspecific competition among higher plants (VI) Effect of some growth factors on the process of competition, *Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(7)* : 15-34
- Ikusaka, I., Shinozaki, K. & Kira, T. 1955 : Intraspecific competition among higher plants (III) Growth of dachweed, with a theoretical consideration on the C-D effect, *Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(6)* : 107-119
- 伊達達夫 1986 : Richards生長関数に基づく同齡単純林の生長モデルに関する研究, 京都

- 府立大学博士論文, 110pp
- Johnson, N.L. & Kotz, S. 1970: Continuous univariate distributions - 1, Houghton Mifflin Company, Boston, 300pp
- Khilmi, H.F. 1957: Foundation of the physics of the biosphere, Moscow, (高橋清訳 1964: 森林の生物物理学理論, 新科学文献刊行会, 東京, 143pp)
- Kira, T., Ogawa, H. & Sakazaki, N. 1953: Intraspecific competition among higher plants (I) Competition-Yield-Density interrelationship dispersed population, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(4): 1-16
- , ————— & Hozumi, K. 1954: Intraspecific competition among higher plants (II) Further discussions on Mitscherlich's law, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(5): 1-7
- , —————, —————, Koyama, H. & Yoda, K. 1956: Intraspecific competition among higher plants (V) Supplementary notes on the C-D effect, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(7): 1-14
- 吉良龍夫編 1957a: 密度・競争・生産(1), 大阪営林局局報(みやま8月号) 67: 13-24
- 1957b: 密度・競争・生産(2), 大阪営林局局報(みやま9月号) 68: 9-18
- 1957c: 密度・競争・生産(3), 大阪営林局局報(みやま11・12月号) 70: 34-45
- 小林正吾 1978: カラマツ人工林の林分成長モデルに関する研究, 北海道林試報告, 15: 1-164
- 松村直人・山本充男 1983: ワイブル型生長曲線, 林統研誌, 8: 37-42
- 箕輪光博 1980: モデル雑感, 林統研誌, 5: 37-40
- 1982: 林木の生長に関する理論的考察(I) log-Mitscherlich 式の理論, 日林誌, 64(12): 461-467
- 1983a: 林木の生長に関する理論的考察(II) 自己間引きモデルの検討, 日林誌, 65(4): 135-142
- 1983b: 林木の生長に関する理論的考察(III) 三次元 log-Mitscherlich 系, 日林誌, 65(11): 417-426
- 箕輪光博 1984: 林木の生長に関する理論的考察(IV) log-Mitscherlich 式と単木の成長およびワイブル分布の一般化と相対成長, 日林誌, 66(5): 183-191
- 内藤健司 1980: 船生演習林におけるヒノキ生長量試験地の生長解析, 宇大演報, 16: 77-137
- 1982: 宇都宮大学船生演習林における生長量標準地定期測定資料(I), 宇大演報, 18: 99-122
- 1983a: ロジスティック理論と密度管理-その展開過程-, 林統研誌, 8: 1-13
- 1983b: Richards functionに基づいた林分生長解析(I) w-N trajectory, 日林誌65(11): 399-407
- 1983c: 分布関数としての Weibull function, 第35回日林関東支論, 49-50
- 1983d: 分布関数としての Richards function, 第35回日林関東支論, 51-54
- 1984a: Richards functionに基づいた林分生長解析(II) 最多密度曲線, 日林誌, 66(1): 10-16
- 1984b: Richards functionに基づいた林分生長解析(III) w-N 曲線, 日林誌, 66(11): 454-461
- 1984c 宇都宮大学船生演習林におけるヒノキ生長量試験地定期測定資料(I), 宇大演報, 20: 85-102
- 1984d: 微分形の Richards & Weibull function の fitting, Jour. PC For., 2(1): 1-5
- 1985: システムの信頼性からみた Weibull 関数と Richards 関数の比較, 日林誌, 67(5): 179-183
- 1988a: 標本における極値の漸近分布関数の誘導, 日林誌, 70(6): 255-260
- 1988b: 宇都宮大学船生演習林におけるヒノキ成長量試験地定期測定資料(II), 宇大演報, 24: 69-83
- 1989: Richards 関数の極限形, 林統研誌, 14: 106-110
- 白石則彦 1983a: Richards function の分類と林分生長曲線への応用(I) 増加型関数について, 日林誌, 65(7): 248-252
- 1983b: Richards function の分類と林分生長曲線への応用(II) 減少型関数について, 日林誌, 65(8): 294-298
- Nelder, J.A. 1962: New kinds of systematic

- designs for spacing experiments, *Biometrics*, 18 : 283-307
- 日本数学会編 1971 : 岩波数学辞典第2版, 岩波書店, 東京, 1140pp
- 西沢正久・木梨謙吉・柿原道喜・長正道 1976 : 林分シミュレーションに対する生長モデルの研究 (III) -ワイプルのパラメータの推定による直径確率分布の予測-, 第87回日林論, 87-88
- 大隅真一 1976 : Richards 生長函数とその林木生長への応用について, 第87回日林論, 111-112
- 1977 : Richards 生長函数, 林統研誌, 2 : 47-58
- Pienaar, L.V. & Turnbull, K.J. 1973 : The Chapman-Richards Generalization of von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands, *For. Sci.*, 19 : 2-22
- Reineke, L.H. 1933 : Perfecting a stand-density index for even aged forest, *Agric. Res.*, 46 : 627-638
- Richards, F.J. 1959 : A flexible growth function for empirical use, *Jour. of Exp. Bot.*, 10 : 290-300
- 坂口勝美 1961 : 間伐の本質に関する研究, 林試研報, 131 : 1-95
- ・土井恭次・安藤貴・福田英比古 1957 : 本数密度からみたアカマツ天然幼齡林分の解析, 林試研報, 93 : 1-23
- 佐藤大七郎・中村賢太郎・扇田正二 1955 : 林分生長論資料 (1) 立木密度のちがう若いアカマツ林, 東大演報, 48 : 65-90
- 四手井綱英 1956 : 林分密度の問題, 日本林業技術協会, 東京, 38pp
- ・只木良也・根占勝彦・北村敦 1957 : 強度枝打ちによる個体成長よくせいが林分成長に及ぼす影響, 第67回日林講, 226-227
- Shinozaki, K. & Kira, T. 1956 : Intraspecific competition among higher plants (VII) Logistic theory of the C-D effect, *Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D(7)* : 35-72
- ・————— 1961 : Intraspecific competition among higher plants (X) The C-D rule, its theory and practical uses, *Jour. Bio., Osaka City Univ.*, 12 : 35-72
- 篠崎吉郎 1961 : 植物成長の Logistic 理論, 京都大学博士論文, 218pp
- ・山倉拓夫 1988 : Richards function について, 第35回日本生態学会大会講演要旨集, 241
- 白石則彦 1983 : BASIC による Richards 関数あてはめのプログラム, 林統研誌, 8 : 50-57
- 1985 : 同齡單純林の生長予測に関する研究, 東大演報, 75 : 199-256
- Suppr, S.H., Young, L.J., Barns, B.V. & Hughes, E.L. 1957 : Nine successive thinning in a Michigan white pine population, *Jour. For.*, 55 : 7-13
- 鈴木太七 1979 : 森林經理学, 朝倉書店, 東京, 197pp
- Sweda, T. 1972 : Even-aged forest growth after fire. A mathematical model, Master's thesis of the Univ. of New Brunswick, Canada, 177pp
- 只木良也 1963 : 競争密度効果を基にした幹材積収穫予測, 林試研報, 154 : 1-19
- 1964 : 競争密度効果式を用いて検討した間伐と幹材積収穫との関係, 林試研報, 166 : 1-22
- ・四手井綱英 1959 : 林木の競争に関する研究 (II) スギで仕立てた模型林分での間伐試験, 日林誌, 41 (9) : 341-439
- ・————— 1962 : 林木の競争に関する研究 (III) アカマツ幼樹を用いた小型林分での機械的な間伐試験, 日林誌, 44 (5) : 129-139
- ・————— 1963 : 数量的間伐に関する生態学的研究, 京大演報, 34 : 1-31
- 竹内公男・箕輪光博 1974 : 純出生過程としての直径分布の考察, 第84回日林講, 73-74
- 竹内 啓 1974 : 統計的推定の漸近理論, 教育出版, 東京, 196pp
- 寺崎 渡 1915 : すぎ林の生長及収穫, 林試研報, 11 : 1-111
- 上野洋二郎・石川正吾 1988 : 単木生長モデルから誘導された Gompertz 関数, 日林誌, 70 (3) : 104-110
- 梅村武夫 1988 : リチャーズの関数の極限, 第36回日林中支論, 75-76
- Weibull, W. 1951 : A statistical distribution

- function of wide applicability, *Jour. of Applied Mechanics*, 18 : 293-297
- Winsor, C.P. 1932 : The Gompertz curve as a growth curve, *Proc. of the National Academy of Sciences*, 18 : 1-8
- Yang, R.C., Kozak, A. & Simith, J.H.G. 1978 : The potential of Weibull type functions as flexible growth curves, *Can. Jour. For. Res.*, 8 : 424-431
- Yang, Y.C. & Lin, F.P. 1981 : Bertalanffy's generalized growth function applied to stands of varying CCF, *Jour. Jpn. For. Soc.*, 63(8) : 294-297
- 依田 浩 1972 : 信頼性理論入門, 朝倉書店, 東京, 242pp
- Yoda, K., Kira, t. & Hozumi, K. 1957 : Intraspecific competition among higher plants (IX) Further analysis of the competitive interaction between adjacent individuals, *Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., series D* (8) : 161-178
- , —————, Ogawa, H. & Hozumi, K. 1963 : Intraspecific competition among higher plants (XI) Self-thinning in over-crowded pure stands under cultivatd and natural conditions, *Jour. Bio., Osaka City Univ.*, 14 : 107-129
- 吉田正章 1979 : 生長曲線の検討, *日林誌*, 61(9) : 321-329
- 吉田正男 1928 : 同齡單純林に於ける単木及林木の生長曲線に関する研究, *東大演報*, 5 : 1-205

SUMMARY

The objective of this paper is a theoretical consideration of some aspects of a forest stand's growth under self-thinning, through a mathematical growth-model. First, the interrelationships between the Weibull, the Richards, and the Gompertz functions are examined from the view-point of the statistics of extremes. Second, some biological significance is given to these three functions, the plant growth provided as multi-component systems, and third, some theoretical considerations are given to some empirical evidence of forest-stand growth, for example, a self-thinning curve, a full-density curve, and the *C-D* effect, through a mathematical growth-model based on the Richards function.

In Chapter I, the author proposed a generalized Weibull function, extending the conditions of the Weibull parameters b and c as follows :

$$W(x) = 1 - \exp \left\{ \left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right\},$$

where both parameters b and c are positive in the case of $x \geq a$, and negative in the case of $x \leq a$.

Both parameters b and c of the Weibull function have been regarded up to date as positive constants, and parameter a has been regarded as the lower limit of the random variable x . On the other hand, both parameters b and c of the generalized Weibull function can not be only positive constants, but also negative constants where the parameter a is regarded as the upper limit of the random variable x , and therefore, the generalized Weibull function can express more comprehensive curves than the former Weibull function. The distribution function of the Weibull with positive parameters b and c can not exceed the probability of $(1 - 1/e)$ at the inflection point when it exists, whereas the Weibull with negative parameters b and c always is able to exceed the probability of $(1 - 1/e)$ at the inflection point. The generalized Weibull function has a strong resemblance to the Richards function, the generalized Bertalanffy's growth-function. The probability density function of the Weibull with nega-

tive parameters b and c has the possibility of expressing a distribution skewed extremely to the left, and which sometimes can be observed in a distribution of top heights.

A new derivation of asymptotic distributions of extremes of a sample is shown in Chapter I, and compared with the derivations of Fisher and Tippett and, of Gumbel. Also it is shown that the Gompertz and the Weibull functions can be regarded as asymptotic distribution functions of the largest and the smallest members, respectively, of a sample, whereas the Richards function can be regarded as an exact distribution function of the largest member of a sample.

Assuming that each tree has the potential to attain a common final size but that the potential to multiply is frozen, and that the development of a tree advances step by step with the unfreezing of the potential, the trajectory of the mean development of trees can be described by the distribution function of the reliability of the freeze. Considering the system of the freeze as a multi-component system composed of many of the same units, the reliability distribution of the freeze will be regarded as a distribution of the longest or the shortest lives of the units according to their system structure.

Originally the Gompertz function had been proposed as a monotone decreasing function through a study on human mortality, whereas the Richards function was proposed as the generalized form of Bertalanffy's growth function which was derived from the view-point of anabolism and catabolism. On the other hand, the Weibull function was proposed as a life-distribution function of the reliability of materials. Although these three functions were derived from different points of view, they can be given some biological meaning, considering plant growth as a multi-component system.

In Chapter II, the author discussed some problems of the logistic theory of plant growth and of its application to the forest-stand density-control diagram, reviewing the original research concerned with them. It is pointed out that the decreasing curve of stand density must satisfy a

reciprocal linear-equation so that the logistic theory can be applied directly to forest-stand growth under self-thinning. Furthermore, the author emphasizes the necessity of theoretical studies on the full-density curve, competition-density effect curve and Tadaki's equation, because these curves are empirical equations and play important roles in the stand density-control diagram.

In Chapter III, a mathematical growth model based on the Richards function was proposed and some general aspects of this model are examined in terms of trajectory, the time course of the stand growth described by the stand density, and the mean tree weight or volume. At first, the Richards function presented by the following equation is classified into eight types from the view-point of curve shape, according to the combination of its parameter signs.

$$R(t) = A\{1 - B\exp(-kt)\}^n,$$

where A , B , k and n are constants, and A is positive.

The process of forest-stand growth can be considered as a twisted trajectory in a three-dimensional growth space with the growing period t , the mean tree weight w , and the stand density N axes. The author derived the general $w-N$ trajectory equation from the assumption that both the mean tree weight and the stand density development can be described by the Richards function.

This $w-N$ trajectory is classified into eleven types in terms of curve shapes on the log-log axes. Also discussed was the difference between the Richards and the reciprocal linear equation that describes the decreasing curve of the stand density.

In Chapter IV, screening the eleven types of $w-N$ trajectory through empirical evidence about self-thinning, the author showed that the D -type and a part of the H -type of the $w-N$ trajectory have the possibility of expressing the self-thinning process, and that they improve the general growth

-model in the previous chapter to a more realistic one by adding some conditions about the Richards parameters.

The author compares the $w-N$ trajectory with Tadaki's equation, and gives a new explanation about the self-thinning process and the full-density curve through the revised growth-model. Previously, it has been considered that the full-density curve indicates the upper limit of the mean tree-weight or volume for a given stand density, and that each of the $w-N$ trajectories with different initial densities can have a point of tangency to the same full-density curve and then travels on the full-density curve. According to the revised growth-model proposed in this paper, it is shown that the $w-N$ trajectory can travel on the full-density curve only when its initial density becomes infinity. On the other hand, the $w-N$ trajectory with a smaller initial density is observed as if it travels along the full-density curve in the final stage of growth, but never have a point of tangency to the full-density curve. In the case of the revised growth-model the full-density curve can be considered as a set of points where the $w-N$ trajectories converge under a different site quality.

In Chapter V, the author derives a $C-D$ curve ($w-N$ curve) equation from the general growth-model, and shows that it can express the various kinds of curves with negative slopes on the log-log axes. It is shown that the $w-N$ curve of the revised growth-model becomes a concave or convex monotone decreasing curve, or a mixture of them. Also it is shown that the slope of the $w-N$ curve of the revised model becomes gentle with the lapse of time. This aspect of the $w-N$ curve is contradictory to the fact observed about the $C-D$ curve, and indicates a limit of the growth model proposed in this paper.

At last, showing the results of some experiments, the author points out that the empirical evidence heretofore observed about the $C-D$ curve, the $w-N$ trajectory, and the full-density curves, is not always true. We must make more efforts to confirm the empirical evidence about

many aspects of forest-stand growth. Finally, the author discusses the problems of the growth model presented in this paper, suggesting the future course of this study.

Generally speaking, it is difficult to accumulate forest-stand growth data in a long time series, while there are many fragmentary bits of knowledge about forest-stand growth. On the other hand, a mathematical model allows many computer simulations over space and time under various conditions. Therefore, we can examine a mathematical growth-model comprehensively through confirmed empirical evidence observed in forest stands. A rational growth-model will be a useful tool in understanding forest-stand growth, and can provide a prediction of forest-stand growth under given conditions.

(received June, 29, 1991)

付表目次

付表-1	成長量標準地資料計算結果	{PLOT-1 胸高直径}	63
付表-2	同 上	{PLOT-1 樹高}	63
付表-3	同 上	{PLOT-2 胸高直径}	64
付表-4	同 上	{PLOT-2 樹高}	64
付表-5	同 上	{PLOT-3 胸高直径}	65
付表-6	同 上	{PLOT-3 樹高}	65
付表-7	同 上	{PLOT-4 胸高直径}	66
付表-8	同 上	{PLOT-4 樹高}	66
付表-9	同 上	{PLOT-5 胸高直径}	67
付表-10	同 上	{PLOT-5 樹高}	67
付表-11	同 上	{PLOT-6 胸高直径}	68
付表-12	同 上	{PLOT-6 樹高}	68
付表-13	同 上	{PLOT-7 胸高直径}	69
付表-14	同 上	{PLOT-7 樹高}	69
付表-15	同 上	{PLOT-8 樹高}	70
付表-16	同 上	{PLOT-8 胸高直径}	71
付表-17	ヒノキ成長量試験地資料計算結果	{PLOT-1 胸高直径(1961)}	72
付表-18	同 上	{PLOT-1 樹高(1961)}	72
付表-19	同 上	{PLOT-1 胸高直径(1966)}	73
付表-20	同 上	{PLOT-1 樹高(1966)}	73
付表-21	同 上	{PLOT-1 胸高直径(1971)}	74
付表-22	同 上	{PLOT-1 樹高(1971)}	74
付表-23	同 上	{PLOT-1 胸高直径(1978)}	75
付表-24	同 上	{PLOT-1 樹高(1978)}	76
付表-25	同 上	{PLOT-1 胸高直径(1982)}	76
付表-26	同 上	{PLOT-1 樹高(1982)}	77
付表-27	同 上	{PLOT-1 胸高直径(1986)}	78
付表-28	同 上	{PLOT-1 樹高(1986)}	79
付表-29	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1961)}	79
付表-30	同 上	{PLOT-2 樹高(1961)}	80
付表-31	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1966)}	80
付表-32	同 上	{PLOT-2 樹高(1966)}	81
付表-33	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1971)}	81
付表-34	同 上	{PLOT-2 樹高(1971)}	82
付表-35	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1977)}	82
付表-36	同 上	{PLOT-2 樹高(1977)}	83
付表-37	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1982)}	83
付表-38	同 上	{PLOT-2 樹高(1982)}	84
付表-39	同 上	{PLOT-2 胸高直径(1986)}	85
付表-40	同 上	{PLOT-2 樹高(1986)}	86
付表-41	チューリンのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果		87
付表-42	チューリンのトウヒ収穫表資料へのR関数当てはめ結果		90
付表-43	ヴァルガスのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果		93
付表-44	ストロブマツ自然間引き林分資料へのR関数当てはめ結果		95

付表-1 成長量標準地資料計算結果 [PLOT-1 胸高直径]

Parameter 推定値					
$a = 8.12614D+00$					
$b = 1.06644D+01$					
$c = 2.99877D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
9	0.00000	0.00189	0.00	0	0
10	0.02190	0.00866	-60.45	3	1
11	0.01460	0.02007	37.51	2	3
12	0.02920	0.03544	21.38	4	5
13	0.03650	0.05348	46.53	5	7
14	0.06569	0.07228	10.03	9	10
15	0.13139	0.08948	-31.90	18	12
16	0.06569	0.10258	56.14	9	14
17	0.11679	0.10949	-6.25	16	15
18	0.10219	0.10902	6.68	14	15
19	0.09489	0.10127	6.72	13	14
20	0.12409	0.08765	-29.37	17	12
21	0.02920	0.07052	141.53	4	10
22	0.05109	0.05260	2.94	7	7
23	0.04380	0.03625	-17.23	6	5
24	0.01460	0.02300	57.58	2	3
25	0.01460	0.01339	-8.29	2	2
26	0.01460	0.00712	-51.24	2	1
27	0.00730	0.00344	-52.83	1	0
28	0.00730	0.00151	-79.33	1	0

付表-2 成長量標準地資料計算結果 [PLOT-1 樹高]

Parameter 推定値					
$a = 6.86956D+00$					
$b = 1.00873D+01$					
$c = 7.95225D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
12	0.01460	0.00713	-51.13	2	1
13	0.02190	0.02425	10.76	3	3
14	0.05109	0.06634	29.84	7	9
15	0.15328	0.14703	-4.08	21	20
16	0.21898	0.25073	14.50	30	34
17	0.31387	0.28861	-8.05	43	40
18	0.13869	0.17539	26.47	19	24
19	0.05839	0.03723	-36.24	8	5
20	0.02190	0.00144	-93.43	3	0
21	0.00000	0.00000	0.00	0	0
22	0.00730	0.00000	-100.00	1	0

付表-3 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 胸高直径〕

Parameter 推定値					
$a = -5.54280D+00$					
$b = 2.08256D+01$					
$c = 8.43565D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
6	0.01250	0.00500	-60.01	2	1
7	0.00000	0.00921	0.00	0	1
8	0.01250	0.01608	28.67	2	3
9	0.03125	0.02673	-14.48	5	4
10	0.05000	0.04226	-15.49	8	7
11	0.03750	0.06335	68.94	6	10
12	0.11250	0.08941	-20.52	18	14
13	0.12500	0.11736	-6.11	20	19
14	0.15000	0.14067	-6.22	24	23
15	0.11250	0.15010	33.42	18	24
16	0.15625	0.13772	-11.86	25	22
17	0.11875	0.10376	-12.62	19	17
18	0.05000	0.06047	20.94	8	10
19	0.02500	0.02524	0.98	4	4
20	0.00000	0.00685	0.00	0	1
21	0.00625	0.00107	-82.86	1	0

付表-4 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 樹高〕

Parameter 推定値					
$a = 5.68954D+00$					
$b = 6.93496D+00$					
$c = 5.94612D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
6	0.00000	0.00000	0.00	0	0
7	0.01875	0.00023	-98.79	3	0
8	0.00625	0.00373	-40.34	1	1
9	0.02500	0.02185	-12.62	4	3
10	0.06875	0.07692	11.88	11	12
11	0.16250	0.18666	14.87	26	30
12	0.31250	0.30387	-2.76	50	49
13	0.26875	0.28329	5.41	43	45
14	0.10000	0.11175	11.75	16	18
15	0.03125	0.01156	-63.01	5	2

付表-5 成長量標準地資料計算結果 (PLOT-3 胸高直径)

Parameter 推定値					
$a = 3.86719D+00$					
$b = 7.78201D+00$					
$c = 3.43803D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
6	0.01660	0.01861	12.10	4	4
7	0.05809	0.04600	-20.81	14	11
8	0.07469	0.08430	12.87	18	20
9	0.10788	0.12610	16.89	26	30
10	0.16183	0.15905	-1.71	39	38
11	0.19502	0.17025	-12.70	47	41
12	0.13278	0.15365	15.71	32	37
13	0.11203	0.11527	2.89	27	28
14	0.07054	0.07054	0.01	17	17
15	0.02075	0.03443	65.94	5	8
16	0.03734	0.01307	-65.01	9	3
17	0.01245	0.00375	-69.86	3	1

付表-6 成長量標準地資料計算結果 (PLOT-3 樹高)

Parameter 推定値					
$a = 3.83234D+00$					
$b = 6.45795D+00$					
$c = 3.85960D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
6	0.01660	0.02596	56.40	4	6
7	0.07884	0.07312	-7.25	19	18
8	0.16598	0.14205	-14.42	40	34
9	0.18672	0.20697	10.84	45	50
10	0.23651	0.22682	-4.10	57	55
11	0.18257	0.18050	-1.14	44	43
12	0.11203	0.09839	-12.17	27	24
13	0.02075	0.03408	64.26	5	8

付表-7 成長量標準地資料計算結果 [PLOT-4 胸高直径]

Parameter 推定値					
$a = 7.29401D+00$					
$b = 1.25132D+01$					
$c = 2.91886D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
8	0.00637	0.00094	-85.28	1	0
9	0.00637	0.00508	-20.22	1	1
10	0.01274	0.01221	-4.14	2	2
11	0.01911	0.02195	14.85	3	3
12	0.01911	0.03372	76.46	3	5
13	0.07006	0.04673	-33.31	11	7
14	0.05732	0.05994	4.56	9	9
15	0.06369	0.07217	13.30	10	11
16	0.06369	0.08220	29.06	10	13
17	0.10191	0.08897	-12.70	16	14
18	0.10191	0.09171	-10.01	16	14
19	0.08917	0.09011	1.06	14	14
20	0.08280	0.08443	1.96	13	13
21	0.07006	0.07537	7.58	11	12
22	0.08280	0.06407	-22.63	13	10
23	0.02548	0.05178	103.23	4	8
24	0.02548	0.03973	55.95	4	6
25	0.04459	0.02890	-35.18	7	5
26	0.03185	0.01989	-37.55	5	3
27	0.00637	0.01293	102.94	1	2
28	0.01274	0.00792	-37.85	2	1
29	0.00637	0.00456	-28.38	1	1

付表-8 成長量標準地資料計算結果 [PLOT-4 樹高]

Parameter 推定値					
$a = 9.17340D+00$					
$b = 6.98617D+00$					
$c = 4.10647D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
10	0.00000	0.00078	0.00	0	0
11	0.00637	0.00907	42.41	1	1
12	0.03185	0.03451	8.35	5	5
13	0.07006	0.08326	18.84	11	13
14	0.19108	0.14970	-21.66	30	24
15	0.17197	0.20809	21.00	27	33
16	0.22930	0.22033	-3.91	36	35
17	0.17834	0.16985	-4.76	28	27
18	0.08917	0.08916	-0.01	14	14
19	0.01911	0.02928	53.26	3	5

付表-9 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-5 胸高直径〕

Parameter 推定値					
$a = 1.20853D+01$					
$b = 8.56451D+00$					
$c = 2.12165D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
13	0.02614	0.01998	-23.58	4	3
14	0.03268	0.04427	35.47	5	7
15	0.07843	0.06680	-14.83	12	10
16	0.07190	0.08514	18.42	11	13
17	0.08497	0.09767	14.95	13	15
18	0.11765	0.10367	-11.88	18	16
19	0.11765	0.10326	-12.23	18	16
20	0.10458	0.09732	-6.94	16	15
21	0.07190	0.08723	21.33	11	13
22	0.07843	0.07461	-4.87	12	11
23	0.03268	0.06104	86.79	5	9
24	0.03268	0.04785	46.41	5	7
25	0.07190	0.03597	-49.97	11	6
26	0.03268	0.02596	-20.56	5	4
27	0.01307	0.01800	37.67	2	3

付表-10 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-5 樹高〕

Parameter 推定値					
$a = 2.06233D+01$					
$b = -3.64837D+00$					
$c = -4.16853D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
12	0.00654	0.01303	99.39	1	2
13	0.01307	0.02419	85.48	2	4
14	0.03922	0.04822	22.95	6	7
15	0.10458	0.10357	-0.96	16	16
16	0.22876	0.23145	1.18	35	35
17	0.41830	0.42306	1.14	64	65
18	0.11765	0.12041	2.35	18	18
19	0.05882	0.00000	-100.00	9	0
20	0.01307	0.00000	-100.00	2	0

付表-11 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-6 胸高直径〕

Parameter 推定値					
$a = 4.37266D+01$					
$b = -2.85410D+01$					
$c = -6.64586D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
3	0.02454	0.01398	-43.02	4	2
4	0.04908	0.01663	-66.12	8	3
5	0.01840	0.01979	7.55	3	3
6	0.03681	0.02358	-35.94	6	4
7	0.03067	0.02809	-8.44	5	5
8	0.03607	0.03340	8.89	5	5
9	0.04908	0.03961	-19.30	8	6
10	0.02454	0.04672	90.40	4	8
11	0.05521	0.05467	-0.98	9	9
12	0.03681	0.06320	71.71	6	10
13	0.11656	0.07180	-38.41	19	12
14	0.06748	0.07954	17.86	11	13
15	0.06748	0.08503	26.00	11	14
16	0.11656	0.08645	-25.83	19	14
17	0.08589	0.08188	-4.66	14	13
18	0.06748	0.07015	3.94	11	11
19	0.04294	0.05208	21.27	7	8
20	0.03067	0.03148	2.62	5	5
21	0.03067	0.01412	-53.97	5	2
22	0.00000	0.00409	0.00	0	1
23	0.01840	0.00062	-96.66	3	0

付表-12 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-6 樹高〕

Parameter 推定値					
$a = 1.75199D+01$					
$b = -4.79823D+00$					
$c = -2.35334D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
4	0.01227	0.01393	13.55	2	2
5	0.02454	0.01772	-27.80	4	3
6	0.04908	0.02290	-53.34	8	4
7	0.02454	0.03012	22.75	4	5
8	0.06748	0.04038	-40.16	11	7
9	0.06135	0.05521	-10.01	10	9
10	0.04294	0.07681	78.85	7	13
11	0.15337	0.10790	-29.65	25	18
12	0.14724	0.14936	1.44	24	24
13	0.17791	0.18957	6.55	29	31
14	0.19018	0.17435	-8.33	31	28
15	0.04294	0.04482	4.37	7	7
16	0.00613	0.00001	-99.88	1	0

付表-13 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-7 胸高直径〕

Parameter 推定値					
$a = 2.29590D+00$					
$b = 1.32267D+01$					
$c = 3.99806D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
5	0.01111	0.00259	-76.72	2	0
6	0.00556	0.00661	19.06	1	1
7	0.01111	0.01341	20.68	2	2
8	0.01667	0.02346	40.74	3	4
9	0.03889	0.03689	-5.14	7	7
10	0.05556	0.05329	-4.08	10	10
11	0.08889	0.07146	-19.61	16	13
12	0.05000	0.08938	78.77	9	16
13	0.11111	0.10435	-6.08	20	19
14	0.12778	0.11345	-11.21	23	20
15	0.12222	0.11436	-6.44	22	21
16	0.09444	0.10620	12.45	17	19
17	0.08333	0.09017	8.21	15	16
18	0.07222	0.06937	-3.94	13	12
19	0.05000	0.04787	-4.26	9	9
20	0.01667	0.02929	75.77	3	5
21	0.02778	0.01571	-43.46	5	3
22	0.01111	0.00728	-34.49	2	1
23	0.00000	0.00288	0.00	0	1
24	0.00556	0.00095	-82.83	1	0

付表-14 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-7 樹高〕

Parameter 推定値					
$a = -3.38720D+00$					
$b = 1.54662D+01$					
$c = 8.76285D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
5	0.01111	0.00488	-56.11	2	1
6	0.01111	0.01160	4.39	2	2
7	0.01667	0.02500	49.99	3	4
8	0.04444	0.04913	10.55	8	9
9	0.08333	0.08765	5.18	15	16
10	0.17778	0.13931	-21.64	32	25
11	0.17778	0.19011	6.94	32	34
12	0.18889	0.20930	10.80	34	38
13	0.19444	0.16878	-13.20	35	30
14	0.08889	0.08639	-2.82	16	16
15	0.00556	0.02285	311.28	1	4

付表-15 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-8 樹高〕

Parameter 推定値					
$a = 3.41427D+00$					
$b = 1.76408D+01$					
$c = 8.22573D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
5	0.00746	0.00000	-100.00	1	0
6	0.00000	0.00000	0.00	0	0
7	0.01493	0.00000	-99.97	2	0
8	0.00746	0.00003	-99.63	1	0
9	0.00746	0.00011	-98.46	1	0
10	0.00000	0.00038	0.00	0	0
11	0.00000	0.00105	0.00	0	0
12	0.00746	0.00256	-65.74	1	0
13	0.00746	0.00565	-24.34	1	1
14	0.01493	0.01147	-23.16	2	2
15	0.01493	0.02166	45.11	2	3
16	0.02985	0.03820	27.97	4	5
17	0.06716	0.06286	-6.41	9	8
18	0.08955	0.09572	6.89	12	13
19	0.11940	0.13280	11.22	16	18
20	0.16418	0.16354	-0.39	22	22
21	0.19403	0.17202	-11.34	26	23
22	0.11194	0.14632	30.71	15	20
23	0.10448	0.09337	-10.63	14	13
24	0.03731	0.04044	8.37	5	5

付表-16 成長量標準地資料計算結果〔PLOT-8 胸高直径〕

Parameter 推定値					
$a = 9.29186D+00$					
$b = 1.27878D+01$					
$c = 2.55345D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差 (%)	実測値	推定値
10	0.00746	0.00223	-70.15	1	0
11	0.02239	0.00870	-61.13	3	1
12	0.00746	0.01757	135.49	1	2
13	0.01493	0.02797	87.41	2	4
14	0.01493	0.03912	162.08	2	5
15	0.05970	0.05021	-15.90	8	7
16	0.08209	0.06046	-26.35	11	8
17	0.05970	0.06912	15.77	8	9
18	0.09701	0.07556	-22.11	13	10
19	0.06716	0.07935	18.14	9	11
20	0.06716	0.08027	19.51	9	11
21	0.07463	0.07836	5.01	10	11
22	0.05224	0.07391	41.48	7	10
23	0.09701	0.06739	-30.54	13	9
24	0.04478	0.05942	32.71	6	8
25	0.05970	0.05067	-15.12	8	7
26	0.02985	0.04179	40.00	4	6
27	0.04478	0.03332	-25.58	6	4
28	0.02239	0.02568	14.72	3	3
29	0.01493	0.01913	28.14	2	3
30	0.00746	0.01375	84.31	1	2
31	0.00746	0.00955	27.96	1	1
32	0.00746	0.00640	-14.29	1	1

付表-17 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 (PLOT-1 直径(1961))

Parameter 推定値					
$a = 5.82121D+00$					
$b = 7.38853D+00$					
$c = 2.61049D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
6	0.00360	0.00088	-75.54	4	1
7	0.01892	0.01823	-3.64	21	20
8	0.04234	0.04744	12.04	47	53
9	0.08198	0.08132	-0.80	91	90
10	0.12432	0.11258	-9.45	138	125
11	0.12432	0.13423	7.97	138	149
12	0.14234	0.14151	-0.58	158	157
13	0.13432	0.13341	-0.62	149	148
14	0.11351	0.11298	-0.47	126	125
15	0.08559	0.08605	0.54	95	96
16	0.06306	0.05888	-6.64	70	65
17	0.03514	0.03611	2.79	39	40
18	0.01892	0.01980	4.68	21	22
19	0.00631	0.00968	53.44	7	11
20	0.00541	0.00420	-22.34	6	5

付表-18 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 (PLOT-1 樹高(1961))

Parameter 推定値					
$a = -1.14556D+00$					
$b = 1.22875D+01$					
$c = 1.01478D+01$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
6	0.00090	0.00577	540.93	1	6
7	0.01441	0.01892	31.26	16	21
8	0.06486	0.05272	-18.72	72	59
9	0.11712	0.12409	5.95	130	138
10	0.22703	0.23334	2.78	252	259
11	0.31261	0.30532	-2.33	347	339
12	0.20270	0.21065	3.92	225	234
13	0.05045	0.04607	-8.68	56	51
14	0.00991	0.00132	-86.64	11	1

付表-19 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 直径(1966)〕

Parameter 推定値					
$a = 5.71882D+00$					
$b = 9.53236D+00$					
$c = 2.94161D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
7	0.00635	0.00625	-1.51	7	7
8	0.01451	0.01893	30.48	16	21
9	0.03626	0.03726	2.74	40	41
10	0.06890	0.05932	-13.91	76	65
11	0.08160	0.08222	0.76	90	91
12	0.10154	0.10241	0.85	112	113
13	0.11695	0.11631	-0.55	129	128
14	0.11423	0.12124	6.13	126	134
15	0.12149	0.11625	-4.31	134	128
16	0.09519	0.10248	7.66	105	113
17	0.10245	0.08291	-19.07	113	91
18	0.05077	0.06136	20.87	56	68
19	0.04170	0.04140	-0.74	46	46
20	0.02629	0.02535	-3.60	29	28
21	0.01269	0.01402	10.47	14	15
22	0.00544	0.00697	28.20	6	8
23	0.00181	0.00310	71.12	2	3
24	0.00091	0.00123	35.52	1	1
25	0.00091	0.00043	-52.49	1	0

付表-20 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 樹高(1966)〕

Parameter 推定値					
$a = 3.38685D+00$					
$b = 1.02904D+01$					
$c = 7.25093D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
8	0.00272	0.00466	71.42	3	5
9	0.01723	0.01575	-8.59	19	17
10	0.04624	0.04266	-7.74	51	47
11	0.09338	0.09573	2.52	103	106
12	0.17226	0.17596	2.15	190	194
13	0.25023	0.25006	-0.07	276	276
14	0.24932	0.24463	-1.88	275	270
15	0.12602	0.13568	7.67	139	150
16	0.04170	0.03168	-24.05	46	35
17	0.00091	0.00201	122.24	1	2

付表-21 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 直径(1971)〕

Parameter 推定値					
$a = 7.19028D+00$					
$b = 9.70080D+00$					
$c = 2.59667D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
8	0.00096	0.00507	430.26	1	5
9	0.01338	0.01810	35.26	14	19
10	0.04398	0.03556	-19.14	46	37
11	0.05927	0.05510	-7.04	62	58
12	0.07553	0.07428	-1.65	79	78
13	0.08891	0.09065	1.96	93	95
14	0.10325	0.10208	-1.13	108	107
15	0.10325	0.10714	3.76	108	112
16	0.09656	0.10535	9.10	101	110
17	0.10038	0.09734	-3.03	105	102
18	0.10325	0.08461	-18.05	108	89
19	0.06597	0.06922	4.93	69	72
20	0.05258	0.05327	1.31	55	56
21	0.03250	0.03854	18.58	34	40
22	0.02677	0.02619	-2.16	28	27
23	0.02199	0.01669	-24.08	23	17
24	0.00765	0.00997	30.31	8	10
25	0.00096	0.00557	482.19	1	6
26	0.00191	0.00290	51.83	2	3
27	0.00000	0.00141	0.00	0	1
28	0.00000	0.00064	0.00	0	1
29	0.00000	0.00027	0.00	0	0
30	0.00096	0.00011	-89.01	1	0

付表-22 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 樹高(1971)〕

Parameter 推定値					
$a = 6.27393D+00$					
$b = 9.07089D+00$					
$c = 6.38833D+00$					
樹高階 (m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
9	0.00096	0.00108	13.17	1	1
10	0.00765	0.00581	-24.03	8	6
11	0.02677	0.02067	-22.79	28	22
12	0.05258	0.05600	6.50	55	59
13	0.11855	0.12122	2.26	124	127
14	0.19216	0.20721	7.83	201	217
15	0.28107	0.26182	-6.85	294	274
16	0.19694	0.21522	9.28	206	225
17	0.09751	0.09395	-3.65	102	98
18	0.02103	0.01619	-23.01	22	17
19	0.00478	0.00073	-84.74	5	1

付表-23 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 (PLOT-1 直径(1978))

Parameter 推定値					
$a = 8.52725D+00$					
$b = 1.06265D+01$					
$c = 2.56909D+00$					
直径階 (cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
9	0.00116	0.00183	57.29	1	2
10	0.00581	0.01081	86.00	5	9
11	0.03140	0.02396	-23.67	27	21
12	0.03140	0.03951	25.85	27	34
13	0.06628	0.05581	-15.80	57	48
14	0.06977	0.07116	2.00	60	61
15	0.09070	0.08395	-7.44	78	72
16	0.08372	0.09283	10.88	72	80
17	0.08837	0.09690	9.65	76	83
18	0.09767	0.09590	-1.82	84	82
19	0.10116	0.09018	-10.85	87	78
20	0.08488	0.08069	-4.94	73	69
21	0.06163	0.06873	11.52	53	59
22	0.05581	0.05573	-0.16	48	48
23	0.04535	0.04300	-5.17	39	37
24	0.03023	0.03156	4.40	26	27
25	0.02442	0.02202	-9.82	21	19
26	0.01512	0.01459	-3.49	13	13
27	0.00581	0.00917	57.75	5	8
28	0.00465	0.00547	17.51	4	5
29	0.00233	0.00308	32.62	2	3
30	0.00000	0.00165	0.00	0	1
31	0.00116	0.00083	-28.60	1	1
32	0.00000	0.00040	0.00	0	0
33	0.00000	0.00018	0.00	0	0
34	0.00000	0.00007	0.00	0	0
35	0.00000	0.00003	0.00	0	0
36	0.00116	0.00001	-99.04	1	0

付表-24 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-1 樹高(1978)]

Parameter 推定値					
$a = 9.78998D+00$					
$b = 7.69442D+00$					
$c = 5.05621D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
11	0.00116	0.00036	-68.85	1	0
12	0.00465	0.00416	-10.51	4	4
13	0.02093	0.01873	-10.53	18	16
14	0.05581	0.05430	-2.71	48	47
15	0.10698	0.11759	9.92	92	101
16	0.21163	0.19642	-7.19	182	169
17	0.23372	0.24576	5.15	201	211
18	0.21977	0.21332	-2.93	189	183
19	0.11163	0.11385	1.99	96	98
20	0.03256	0.03166	-2.76	28	27
21	0.00116	0.00370	218.56	1	3

付表-25 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-1 直径(1982)]

Parameter 推定値					
$a = 8.93469D+00$					
$b = 1.15843D+01$					
$c = 2.46693D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
9	0.00119	0.00011	-91.00	1	0
10	0.00119	0.00641	438.97	1	5
11	0.02497	0.01673	-32.99	21	14
12	0.02140	0.02917	36.29	18	25
13	0.04162	0.04250	2.12	35	36
14	0.06540	0.05557	-15.03	55	47
15	0.06897	0.06730	-2.41	58	57
16	0.07729	0.07674	-0.71	65	65
17	0.07729	0.08315	7.58	65	70
18	0.08086	0.08608	6.46	68	72
19	0.08323	0.08545	2.66	70	72
20	0.08918	0.08151	-8.60	75	69
21	0.08323	0.07483	-10.10	70	63
22	0.05589	0.06616	18.38	47	56
23	0.05351	0.05636	5.33	45	47
24	0.05826	0.04627	-20.59	49	39
25	0.03567	0.03661	2.62	30	31
26	0.02616	0.02791	6.69	22	23
27	0.01665	0.02050	23.12	14	17
28	0.01902	0.01450	-23.81	16	12

29	0.00713	0.00987	38.34	6	8
30	0.00357	0.00647	81.25	3	5
31	0.00467	0.00407	-14.35	4	3
32	0.00119	0.00247	107.53	1	2
33	0.00000	0.00144	0.00	0	1
34	0.00000	0.00080	0.00	0	1
35	0.00119	0.00043	-63.79	1	0
36	0.00000	0.00022	0.00	0	0
37	0.00000	0.00011	0.00	0	0
38	0.00000	0.00005	0.00	0	0
39	0.00000	0.00002	0.00	0	0
40	0.00119	0.00001	-99.15	1	0

付表-26 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 樹高(1982)〕

Parameter 推定値					
$a = 1.29233D+01$					
$b = 6.38072D+00$					
$c = 4.45360D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
13	0.00238	0.00000	-99.99	2	0
14	0.00476	0.00150	-68.56	4	1
15	0.02259	0.01436	-36.42	19	12
16	0.04875	0.05407	10.90	41	45
17	0.12366	0.12967	4.86	104	109
18	0.22117	0.22082	-0.15	186	186
19	0.26992	0.26375	-2.29	227	222
20	0.19144	0.20438	6.76	161	172
21	0.09869	0.09050	-8.30	83	76
22	0.01546	0.01931	24.94	13	16
23	0.00119	0.00161	35.07	1	1

付表-27 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 直径(1986)〕

Parameter 推定値					
$a = 9.80233D+00$					
$b = 1.20636D+01$					
$c = 2.39950D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
10	0.00000	0.00063	0.00	0	1
11	0.01252	0.00782	-37.54	10	6
12	0.01502	0.01805	20.16	12	14
13	0.02503	0.02976	18.90	20	24
14	0.04255	0.04193	-1.46	34	34
15	0.05757	0.05362	-6.87	46	43
16	0.06008	0.06397	6.49	48	51
17	0.08511	0.07227	-15.08	68	58
18	0.07384	0.07798	5.60	59	62
19	0.07009	0.08077	15.24	56	65
20	0.08761	0.08060	-8.00	70	64
21	0.07509	0.07765	3.41	60	62
22	0.08010	0.08234	-9.68	64	58
23	0.05382	0.06523	21.21	43	52
24	0.05257	0.05697	8.38	42	46
25	0.05882	0.04821	-18.04	47	39
26	0.04255	0.03953	-7.09	34	32
27	0.03379	0.03142	-7.01	27	25
28	0.02003	0.02420	20.87	16	19
29	0.02128	0.01807	-15.09	17	14
30	0.00876	0.01307	49.15	7	10
31	0.00876	0.00915	4.50	7	7
32	0.00375	0.00621	65.45	3	5
33	0.00626	0.00408	-34.78	5	3
34	0.00000	0.00260	0.00	0	2
35	0.00125	0.00160	27.61	1	1
36	0.00000	0.00095	0.00	0	1
37	0.00000	0.00055	0.00	0	0
38	0.00000	0.00030	0.00	0	0
39	0.00000	0.00016	0.00	0	0
40	0.00125	0.00009	-93.20	1	0
41	0.00000	0.00004	0.00	0	0
42	0.00000	0.00002	0.00	0	0
43	0.00125	0.00001	-99.23	1	0

付表-28 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-1 樹高(1986)〕

Parameter 推定値					
$a = 1.51689D+01$					
$b = 5.29156D+00$					
$c = 3.92108D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
16	0.01377	0.00332	-75.88	11	3
17	0.02879	0.03287	14.19	23	26
18	0.10263	0.10939	6.59	82	87
19	0.22278	0.21762	-2.31	178	174
20	0.27660	0.28211	1.99	221	225
21	0.22778	0.22776	-0.01	182	182
22	0.10013	0.10272	2.60	80	82
23	0.02253	0.02225	-1.24	18	18

付表-29 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 直径(1961)〕

Parameter 推定値					
$a = 3.45323D+00$					
$b = 8.48956D+00$					
$c = 3.56281D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
5	0.00271	0.00533	97.07	3	6
6	0.02254	0.01892	-16.08	25	21
7	0.03607	0.04286	18.84	40	48
8	0.08206	0.07603	-7.35	91	84
9	0.11091	0.11320	2.07	123	126
10	0.13796	0.14508	5.16	153	161
11	0.16592	0.16083	-3.07	184	178
12	0.15329	0.15331	0.01	170	170
13	0.12353	0.12410	0.46	137	138
14	0.07935	0.08386	5.68	88	93
15	0.04509	0.04634	2.79	50	51
16	0.02525	0.02047	-18.94	28	23
17	0.00361	0.00704	95.21	4	8
18	0.00451	0.00184	-59.28	5	2
19	0.00451	0.00035	-92.18	5	0
20	0.00090	0.00005	-94.64	1	0
21	0.00000	0.00000	0.00	0	0
22	0.00090	0.00000	-99.97	1	0
23	0.00090	0.00000	-100.00	1	0

付表-30 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-2 樹高(1961)]

Parameter 推定値					
$a = 4.22581D+00$					
$b = 5.09317D+00$					
$c = 3.08974D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
5	0.01353	0.01180	-12.75	15	13
6	0.05861	0.06444	9.94	65	71
7	0.15509	0.14625	-5.70	172	162
8	0.22272	0.21822	-2.02	247	242
9	0.22002	0.23367	6.21	244	259
10	0.19206	0.18064	-5.95	213	200
11	0.10550	0.09850	-6.64	117	109
12	0.02615	0.03652	39.65	29	40
13	0.00451	0.00881	95.44	5	10
14	0.00180	0.00132	-26.88	2	1

付表-31 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-2 直径(1966)]

Parameter 推定値					
$a = 4.76697D+00$					
$b = 1.026948+01$					
$c = 3.77443D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
7	0.00542	0.00532	-1.87	6	6
8	0.01085	0.01472	35.67	12	16
9	0.03165	0.03040	-3.94	35	34
10	0.05696	0.05243	-7.96	63	58
11	0.07685	0.07913	2.96	85	88
12	0.09765	0.10662	9.19	108	118
13	0.12929	0.12907	-0.17	143	143
14	0.14014	0.14018	0.03	155	155
15	0.14467	0.13568	-6.21	160	150
16	0.11212	0.11583	3.31	124	128
17	0.07595	0.08606	13.32	84	95
18	0.05515	0.05480	-0.64	61	61
19	0.03165	0.02938	-7.16	35	32
20	0.01447	0.01301	-10.08	16	14
21	0.00904	0.00466	-48.48	10	5
22	0.00271	0.00132	-51.38	3	1
23	0.00090	0.00029	-68.11	1	0
24	0.00000	0.00005	0.00	0	0
25	0.00271	0.00001	-99.79	3	0
26	0.00090	0.00000	-99.95	1	0
27	0.00090	0.00000	-100.00	1	0

付表-32 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 樹高(1966)〕

Parameter 推定値					
$a = 4.75360D+00$					
$b = 7.38033D+00$					
$c = 4.44386D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
7	0.00090	0.00996	1002.01	1	11
8	0.03345	0.03468	3.66	37	38
9	0.09313	0.08236	-11.56	103	91
10	0.14828	0.14926	0.66	164	165
11	0.22152	0.21050	-4.97	245	233
12	0.20344	0.22488	10.54	225	249
13	0.19530	0.17161	-12.13	216	190
14	0.08409	0.08595	2.22	93	95
15	0.01447	0.02535	75.23	16	28
16	0.00362	0.00386	6.72	4	4
17	0.00181	0.00026	-85.63	2	0

付表-33 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 直径(1971)〕

Parameter 推定値					
$a = 5.40813D+00$					
$b = 1.157888 + 01$					
$c = 3.64593D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
8	0.00554	0.00597	7.94	6	6
9	0.01568	0.01403	-10.54	17	15
10	0.02306	0.02633	14.17	25	29
11	0.04705	0.04277	-9.08	51	46
12	0.06550	0.06239	-4.74	71	68
13	0.06827	0.08316	21.82	74	90
14	0.09963	0.10208	2.46	108	111
15	0.12731	0.11566	-9.15	138	125
16	0.11716	0.12076	3.07	127	131
17	0.11716	0.11571	-1.24	127	125
18	0.10240	0.10113	-1.24	111	110
19	0.07196	0.08003	11.21	78	87
20	0.05351	0.05684	6.23	58	62
21	0.03782	0.03588	-5.13	41	39
22	0.02399	0.01992	-16.93	26	22
23	0.01107	0.00962	-13.09	12	10
24	0.00277	0.00399	44.20	3	4
25	0.00277	0.00140	-49.26	3	2
26	0.00277	0.00041	-85.06	3	0
27	0.00092	0.00010	-89.10	1	0
28	0.00092	0.00002	-97.84	1	0
29	0.00092	0.00000	-99.66	1	0
30	0.00185	0.00002	-99.98	2	0

付表-34 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-2 樹高(1971)]

Parameter 推定値					
$a = 8.07590D+00$					
$b = 5.97086D+00$					
$c = 3.60448D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
9	0.00369	0.00468	26.71	4	5
10	0.03413	0.03109	-8.92	37	34
11	0.08303	0.08713	4.94	90	94
12	0.16236	0.16232	-0.03	176	176
13	0.22232	0.22181	-0.23	241	240
14	0.22325	0.22374	0.22	242	243
15	0.16052	0.16130	0.49	174	175
16	0.07657	0.07877	2.88	83	85
17	0.02675	0.02436	-8.95	29	26
18	0.00554	0.00441	-20.31	6	5
19	0.00000	0.00043	0.00	0	0
20	0.00092	0.00002	-97.79	1	0

付表-35 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-2 直径(1977)]

Parameter 推定値					
$a = 7.90480D+00$					
$b = 1.148928+01$					
$c = 3.11810D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
9	0.00224	0.00187	-16.64	2	2
10	0.00560	0.00735	31.19	5	7
11	0.01568	0.01659	5.82	14	15
12	0.03135	0.02933	-6.47	28	26
13	0.04703	0.04479	-4.76	42	40
14	0.05375	0.06170	14.80	48	55
15	0.07839	0.07827	-0.15	70	70
16	0.10302	0.09242	-10.29	92	83
17	0.09295	0.10211	9.86	83	91
18	0.10078	0.10579	4.97	90	94
19	0.11086	0.10280	-7.27	99	92
20	0.09518	0.09356	-1.71	85	84
21	0.07503	0.07959	6.09	67	71
22	0.05487	0.06312	15.02	49	56
23	0.05823	0.04650	-20.15	52	42
24	0.02800	0.03171	13.27	25	28
25	0.01792	0.01994	11.29	16	18
26	0.01344	0.01151	-14.31	12	10
27	0.00224	0.00608	171.41	2	5

28	0.00224	0.00292	30.41	2	3
29	0.00224	0.00127	-43.23	2	1
30	0.00336	0.00050	-85.14	3	0
31	0.00224	0.00018	-92.15	2	0
32	0.00224	0.00006	-97.53	2	0
33	0.00000	0.00002	0.00	0	0
34	0.00000	0.00000	0.00	0	0
35	0.00000	0.00000	0.00	0	0
36	0.00112	0.00000	-99.99	1	0

付表-36 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 樹高(1977)〕

Parameter 推定値					
$a = 9.77517D+00$					
$b = 6.32248D+00$					
$c = 3.97617D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
10	0.00224	0.00003	-98.63	2	0
11	0.00672	0.00475	-29.34	6	4
12	0.03359	0.02766	-17.68	30	25
13	0.07503	0.07916	5.51	67	71
14	0.14446	0.15491	7.24	129	138
15	0.23404	0.22317	-4.65	209	199
16	0.23180	0.23455	1.18	207	209
17	0.16461	0.17094	3.84	147	153
18	0.08175	0.07990	-2.25	73	71
19	0.02576	0.02169	-15.77	23	19

付表-37 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 直径(1982)〕

Parameter 推定値					
$a = 8.35267D+00$					
$b = 1.25817D+01$					
$c = 2.95048D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
10	0.00453	0.00443	-2.10	4	4
11	0.00453	0.01110	145.10	4	10
12	0.02265	0.02042	-9.86	20	18
13	0.03737	0.03188	-14.70	33	28
14	0.04530	0.04474	-1.23	40	40
15	0.04643	0.05802	24.96	41	51
16	0.08381	0.07054	-15.83	74	62
17	0.08041	0.08107	0.82	71	72
18	0.08720	0.08847	1.46	77	78

19	0.08494	0.09191	8.21	75	81
20	0.08607	0.09098	5.70	76	80
21	0.09287	0.08581	-7.59	82	76
22	0.07814	0.07709	-1.35	69	68
23	0.07135	0.06589	-7.65	63	58
24	0.04870	0.05351	9.89	43	47
25	0.03851	0.04123	7.07	34	36
26	0.03398	0.03008	-11.47	30	27
27	0.02152	0.02074	-3.61	19	18
28	0.00793	0.01349	70.17	7	12
29	0.00793	0.00826	4.17	7	7
30	0.00340	0.00475	39.75	3	4
31	0.00227	0.00256	12.92	2	2
32	0.00340	0.00129	-62.09	3	1
33	0.00113	0.00060	-46.58	1	1
34	0.00227	0.00026	-88.33	2	0
35	0.00227	0.00011	-95.27	2	0
36	0.00000	0.00004	0.00	0	0
37	0.00000	0.00001	0.00	0	0
38	0.00000	0.00000	0.00	0	0
39	0.00000	0.00000	0.00	0	0
40	0.00113	0.00000	-99.97	1	0

付表-38 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 樹高(1982)〕

Parameter 推定値					
$a = 1.16189D+01$					
$b = 6.11797D+00$					
$c = 3.70954D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
12	0.00340	0.00033	-90.34	3	0
13	0.00906	0.01070	18.15	8	9
14	0.04643	0.04562	-1.75	41	40
15	0.11099	0.10883	-1.94	98	96
16	0.17554	0.18362	4.61	155	162
17	0.23783	0.23009	-3.25	210	203
18	0.20838	0.21113	1.32	184	186
19	0.13137	0.13561	3.23	116	120
20	0.06229	0.05717	-8.21	55	50
21	0.01246	0.01463	17.42	11	13

付表-39 ヒノキ成長量標準地資料計算結果 [PLOT-2 直径(1986)]

Parameter 推定値					
$a = 9.21020D+00$					
$b = 1.31912D+01$					
$c = 2.68756D+00$					
直径階(cm)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
10	0.00115	0.00176	52.54	1	2
11	0.00346	0.00697	101.38	3	6
12	0.01845	0.01458	-20.99	16	13
13	0.02191	0.02398	9.40	19	21
14	0.03576	0.03452	-3.46	31	30
15	0.04383	0.04551	3.83	38	39
16	0.05421	0.05616	3.60	47	49
17	0.07497	0.06570	-12.36	65	57
18	0.07266	0.07340	1.01	63	64
19	0.08074	0.07564	-2.60	70	68
20	0.07497	0.08105	8.10	65	70
21	0.06920	0.08047	16.28	60	70
22	0.08189	0.07704	-5.92	71	67
23	0.07151	0.07117	-0.48	62	62
24	0.06920	0.06343	-8.34	60	55
25	0.06690	0.05454	-18.47	58	47
26	0.03691	0.04522	22.53	32	39
27	0.02307	0.03615	56.70	20	31
28	0.04037	0.02783	-31.06	35	24
29	0.02191	0.02063	-5.86	19	18
30	0.01153	0.01471	27.54	10	13
31	0.00692	0.01008	45.69	6	9
32	0.00346	0.00664	91.81	3	6
33	0.00346	0.00419	21.17	3	4
34	0.00346	0.00254	-26.61	3	2
35	0.00115	0.00147	27.75	1	1
36	0.00231	0.00082	-64.53	2	1
37	0.00115	0.00043	-62.33	1	0
38	0.00115	0.00022	-80.89	1	0
39	0.00115	0.00011	-90.75	1	0
40	0.00000	0.00005	0.00	0	0
41	0.00000	0.00002	0.00	0	0
42	0.00000	0.00001	0.00	0	0
43	0.00115	0.00000	-99.69	1	0

付表-40 ヒノキ成長量標準地資料計算結果〔PLOT-2 樹高(1986)〕

Parameter 推定値					
$a = 1.22347D+01$					
$b = 7.03845D+00$					
$c = 4.45341D+00$					
樹高階(m)	実測確率	推定確率	誤差(%)	実測値	推定値
13	0.00231	0.00030	-87.11	2	0
14	0.00692	0.00532	-23.11	6	5
15	0.02307	0.02473	7.22	20	21
16	0.06920	0.06858	-0.90	60	59
17	0.13149	0.13797	4.93	114	120
18	0.21684	0.21055	-2.90	188	183
19	0.23414	0.23864	1.92	203	207
20	0.18685	0.18873	1.01	162	164
21	0.09804	0.09472	-3.39	85	82
22	0.02076	0.02664	28.31	18	23
23	0.00692	0.00360	-47.92	6	3

付表-41 チューリンのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その1)

地位 1a		平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
		A :	6.32134		A :	181.819	
		B :	-0.0972979		B :	0.766069	
		k :	0.0217700		k :	0.0114752	
		n :	-73.4719		n :	-3.1023	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	0.05	0.07	53.01	3350	3347.54	-0.07	
30	0.15	0.17	9.17	2050	2063.16	0.64	
40	0.34	0.34	-0.59	1430	1416.81	-0.92	
50	0.61	0.59	-3.05	1055	1049.03	-0.57	
60	0.96	0.94	-2.33	820	820.74	0.09	
70	1.36	1.35	-0.23	670	669.58	-0.06	
80	1.81	1.83	1.07	562	564.41	0.43	
90	2.30	2.32	1.11	483	488.33	1.10	
100	2.82	2.82	0.02	423	431.54	2.02	
110	3.29	3.30	0.27	384	388.05	1.05	
120	3.79	3.75	-1.13	350	354.04	1.15	
130	4.16	4.15	-0.29	331	326.96	-1.22	
140	4.48	4.51	0.59	317	305.08	-3.76	
地位 1		平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
		A :	4.76278		A :	210.792	
		B :	-0.195588		B :	0.721514	
		k :	0.0225354		k :	0.0124889	
		n :	-38.9693		n :	-3.55506	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	0.03	0.05	53.15	3970	3968.06	-0.05	
30	0.11	0.12	9.58	2400	2409.34	0.39	
40	0.25	0.24	-1.09	1640	1633.24	-0.41	
50	0.45	0.43	-3.68	1200	1196.65	-0.28	
60	0.71	0.70	-1.72	935	928.62	-0.68	
70	1.01	1.02	0.88	760	752.94	-0.93	
80	1.38	1.38	0.52	625	631.85	1.10	
90	1.76	1.77	0.68	536	544.99	1.68	
100	2.16	2.16	-0.15	470	480.66	2.27	
110	2.53	2.53	0.05	426	431.77	1.35	
120	2.88	2.87	-0.37	392	393.79	0.46	
130	3.19	3.18	-0.43	368	363.79	-1.15	
140	3.43	3.45	0.45	353	339.65	-3.78	

付表-41 チューリンのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その2)

地位	平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
2	パラメータ推定値			パラメータ推定値		
	A	: 3.95557		A	: 239.759	
	B	: 0.467544		B	: 0.800256	
	k	: 0.0190459		k	: 0.0119792	
	n	: 12.6577		n	: -3.01532	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	0.02	0.03	41.28	4800	4796.82	-0.07
30	0.07	0.08	10.42	2800	2824.36	0.87
40	0.17	0.18	3.34	1940	1887.97	-2.68
50	0.34	0.32	-4.84	1340	1374.81	2.60
60	0.52	0.51	-1.23	1070	1064.39	-0.52
70	0.75	0.76	-0.68	860	862.64	0.31
80	1.01	1.02	0.82	725	724.22	-0.11
90	1.28	1.30	1.10	625	625.15	0.02
100	1.58	1.59	0.68	550	551.83	0.33
110	1.88	1.87	-0.60	490	496.08	1.24
120	2.15	2.13	-0.56	450	452.74	0.61
130	2.39	2.38	-0.40	420	418.41	-0.38
140	2.59	2.60	0.53	400	390.80	-2.30
地位	平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
3	パラメータ推定値			パラメータ推定値		
	A	: 2.69690		A	: 252.654	
	B	: -0.355592		B	: 0.807526	
	k	: 0.0222788		k	: 0.0108257	
	n	: -23.7573		n	: -3.04588	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	0.01	0.02	70.32	6200	6200.71	0.01
30	0.04	0.05	19.73	3650	3642.75	-0.20
40	0.11	0.11	0.34	2400	2419.38	0.81
50	0.20	0.20	-2.94	1760	1747.03	-0.74
60	0.33	0.32	-3.12	1340	1340.03	0.00
70	0.49	0.49	-0.88	1080	1075.59	-0.41
80	0.67	0.68	1.61	905	894.28	-1.18
90	0.88	0.89	0.86	760	764.62	0.61
100	1.10	1.10	0.35	660	668.71	1.32
110	1.32	1.32	-0.54	585	595.80	1.85
120	1.52	1.52	-0.23	535	539.10	0.77
130	1.71	1.70	-0.47	495	494.16	-0.17
140	1.85	1.86	0.47	470	457.98	-2.56

付表-41 チューリンのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その3)

地位 4		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 1.51340			A : 411.808		
		B : -0.839721			B : 0.213081		
		k : 0.0240232			k : 0.0157157		
		n : -11.6958			n : -17.2917		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	(.....))	(8900)	
30	0.02	0.03	21.77	4860	4855.99	-0.08	
40	0.06	0.06	1.64	3300	3315.97	0.48	
50	0.11	0.11	-1.93	2420	2409.22	-0.45	
60	0.19	0.18	-1.97	1850	1842.11	-0.43	
70	0.28	0.28	-0.92	1470	1469.33	-0.05	
80	0.39	0.39	0.85	1220	1213.98	-0.49	
90	0.51	0.51	0.94	1030	1032.95	0.29	
100	0.64	0.64	0.15	890	900.86	1.22	
110	0.77	0.77	-0.44	790	802.14	1.54	
120	0.89	0.88	-0.51	720	726.84	0.95	
130	0.99	0.99	0.32	675	668.42	-0.97	
140	1.08	1.08	0.05	635	622.43	-1.98	
地位 5		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 0.998034			A : 655.682		
		B : 0.729177			B : -1.26921		
		k : 0.0164209			k : 0.0191160		
		n : 7.65569			n : 4.297716		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	(.....))	(14000)	
30	0.01	0.01	11.74	6650	6662.94	0.19	
40	0.03	0.03	2.71	4880	4820.49	-1.22	
50	0.05	0.05	-3.30	3540	3617.58	2.19	
60	0.09	0.09	-0.77	2820	2810.35	-0.34	
70	0.13	0.13	0.09	2270	2254.53	-0.68	
80	0.19	0.19	0.88	1880	1862.64	-0.92	
90	0.25	0.25	0.17	1580	1580.29	0.02	
100	0.31	0.31	-0.11	1370	1372.88	0.21	
110	0.38	0.38	-0.50	1210	1217.90	0.65	
120	0.44	0.44	0.26	1100	1100.31	0.03	

付表-42 チューリンのトウヒ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その1)

地位	平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
la	パラメータ推定値			パラメータ推定値		
	<i>A</i> :	6.20405		<i>A</i> :	496.382	
	<i>B</i> :	1.06828		<i>B</i> :	-1.22937	
	<i>k</i> :	0.0194391		<i>k</i> :	0.0357945	
	<i>n</i> :	4.75760		<i>n</i> :	6.00404	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	0.02	0.01	-23.49	8365	8370.87	0.07
30	0.08	0.08	4.19	4120	4076.56	-1.05
40	0.25	0.25	-0.35	2253	2329.29	3.39
50	0.53	0.53	0.05	1523	1523.15	0.01
60	0.91	0.90	-0.08	1135	1110.59	-2.15
70	1.35	1.35	-0.08	908	881.38	-2.93
80	1.84	1.84	0.08	767	745.79	-2.77
90	2.33	2.33	0.10	672	661.71	-1.53
100	2.82	2.82	-0.16	605	607.75	0.45
110	3.27	3.27	0.07	559	572.25	2.37
120	3.69	3.69	-0.01	523	548.47	4.87
地位	平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
1	パラメータ推定値			パラメータ推定値		
	<i>A</i> :	5.22694		<i>A</i> :	530.797	
	<i>B</i> :	1.16649		<i>B</i> :	-1.85392	
	<i>k</i> :	0.0169772		<i>k</i> :	0.0331466	
	<i>n</i> :	4.24465		<i>n</i> :	4.61378	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	0.01	0.00	-67.40	11708	11711.63	0.03
30	0.04	0.03	-13.78	5930	5907.70	-0.38
40	0.12	0.12	0.27	3336	3366.12	0.90
50	0.27	0.28	2.11	2136	2144.69	0.41
60	0.51	0.51	0.17	1509	1506.66	-0.16
70	0.81	0.81	-0.17	1163	1148.71	-1.23
80	1.15	1.15	-0.32	953	935.75	-1.81
90	1.52	1.51	-0.38	815	802.97	-1.48
100	1.88	1.89	0.43	724	717.12	-0.95
110	2.25	2.25	0.14	652	660.06	1.24
120	2.60	2.59	-0.15	598	621.34	3.90

付表-42 チューリンのトウヒ 取獲表資料へのR関数当てはめ結果(その2)

地位 2		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 3.77426			A : 309.662		
		B : 1.11623			B : 0.911222		
		k : 0.0174572			k : 0.0121982		
		n : 5.15748			n : -3.26822		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	0.00	0.00	-56.62	18515	18509.26	-0.03	
30	0.02	0.01	-20.41	8062	8122.19	0.75	
40	0.06	0.06	0.02	4637	4510.42	-2.73	
50	0.14	0.15	2.38	2891	2890.95	-0.00	
60	0.29	0.29	0.29	1979	2039.63	3.06	
70	0.49	0.48	-0.62	1489	1540.80	3.48	
80	0.71	0.71	-0.21	1196	1224.66	2.40	
90	0.96	0.97	0.34	1010	1012.11	0.21	
100	1.24	1.23	-0.20	873	862.52	-1.20	
110	1.50	1.50	0.18	779	753.36	-3.20	
120	1.76	1.76	-0.07	707	671.33	-5.04	
地位 3		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 2.18337			A : 719.426		
		B : 1.18979			B : -0.223439		
		k : 0.0189724			k : 0.0270595		
		n : 5.39449			n : 30.0343		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	0.00	0.00	-77.93	28291	28299.38	0.03	
30	0.01	0.01	-31.84	12411	12329.52	-0.66	
40	0.03	0.03	-8.68	6222	6438.53	3.48	
50	0.07	0.08	4.21	4034	3884.54	-3.71	
60	0.16	0.16	1.34	2657	2626.63	-1.14	
70	0.28	0.28	-0.59	1939	1941.96	0.15	
80	0.43	0.43	-0.65	1540	1539.16	-0.05	
90	0.59	0.59	0.17	1295	1287.45	-0.58	
100	0.76	0.76	0.08	1121	1122.67	0.15	
110	0.92	0.92	0.17	999	1010.86	1.19	
120	1.08	1.08	-0.11	906	932.88	2.97	

付表-42 チューリンのトウヒ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その3)

地位	平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
4	A	1.13081		A	997.052	
	B	0.973077		B	-1.08671	
	k	0.0221172		k	0.0297171	
	n	8.57755		n	7.66526	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	(.....))	(.....))
30	0.00	0.00	-18.75	16805	16807.59	0.02
40	0.01	0.01	-0.54	8940	8926.19	-0.15
50	0.04	0.04	2.18	5371	5379.09	0.15
60	0.09	0.09	-0.00	3584	3608.63	0.69
70	0.16	0.15	-0.94	2636	2645.06	0.34
80	0.24	0.24	0.43	2112	2082.32	-1.41
90	0.33	0.33	0.19	1759	1734.66	-1.38
100	0.43	0.43	-0.22	1517	1510.17	-0.45
110	0.53	0.53	0.05	1353	1360.18	0.53
120	0.62	0.62	0.01	1235	1257.30	1.81
地位	平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
5	A	0.472409		A	1419.00	
	B	0.590152		B	0.718220	
	k	0.0290487		k	0.0270291	
	n	21.0873		n	-7.92398	
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	(.....))	(.....))
30	(.....))	(.....))
40	0.01	0.01	2.14	12966	12967.20	0.01
50	0.02	0.02	1.46	7249	7241.99	-0.10
60	0.05	0.05	0.13	4772	4770.60	-0.03
70	0.09	0.09	-1.38	3480	3518.66	1.11
80	0.13	0.13	0.49	2835	2810.61	-0.86
90	0.18	0.19	0.65	2401	2377.68	-0.97
100	0.24	0.24	-0.39	2095	2097.61	0.12
110	0.28	0.28	-0.20	1904	1908.79	0.25
120	0.32	0.32	0.15	1769	1777.54	0.48

付表-43 ヴァルガスのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その1)

地位 1		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 2.39065			A : 433.262		
		B : -1.63603			B : -3844.24		
		k : 0.0297153			k : 0.0915075		
		n : -8.37600			n : 0.377858		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	(.....))	(.....))	
30	0.04	0.03	-22.13	3432	3479.11	1.37	
40	0.08	0.08	-3.67	2563	2467.69	-3.72	
50	0.16	0.17	5.72	1776	1756.17	-1.12	
60	0.31	0.31	1.52	1190	1259.92	5.88	
70	0.50	0.50	0.71	886	920.73	3.92	
80	0.76	0.73	-3.68	678	698.84	3.07	
90	0.96	0.98	1.70	604	564.98	-6.46	
100	1.21	1.22	1.08	531	493.07	-7.14	
110	1.45	1.44	-0.91	475	458.76	-3.42	
120	1.64	1.64	0.05	448	443.76	-0.95	
130	1.80	1.80	0.05	421	437.52	3.92	
140	1.94	1.94	0.01	402	434.97	8.20	
地位 2		平均幹材積(立米/本)			個体密度(本/ha)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 1.87824			A : 523.139		
		B : 0.0468633			B : -541.001		
		k : 0.0240184			k : 0.0711948		
		n : 198.985			n : 0.491296		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
20	(.....))	(.....))	
30	0.03	0.02	-27.34	4035	4064.62	0.73	
40	0.05	0.05	-5.53	2946	2887.34	-1.99	
50	0.11	0.11	5.03	2086	2066.94	-0.91	
60	0.20	0.20	4.13	1464	1501.49	2.56	
70	0.33	0.33	-0.12	1070	1119.59	4.63	
80	0.49	0.48	-3.05	851	870.33	2.27	
90	0.64	0.64	0.22	750	715.62	-4.58	
100	0.80	0.81	1.00	668	625.30	-6.39	
110	0.96	0.97	0.74	604	575.62	-4.70	
120	1.12	1.11	-0.94	549	549.54	0.10	
130	1.24	1.25	0.10	521	536.26	2.93	
140	1.36	1.36	0.08	494	529.62	7.21	

付表-43 ヴァルガスのマツ収穫表資料へのR関数当てはめ結果(その2)

地位	平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
3	$A : 1.15724$ $B : -8.04118$ $k : 0.0344579$ $n : -3.10560$			$A : 543.124$ $B : -74.4297$ $k : 0.0475239$ $n : 0.735747$		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	(.....))	(.....))
30	0.02	0.02	-4.23	4611	4621.47	0.23
40	0.04	0.04	-1.25	3350	3314.52	-1.06
50	0.08	0.07	-3.12	2379	2409.95	1.30
60	0.13	0.13	-0.20	1784	1787.59	0.20
70	0.21	0.21	0.81	1363	1362.97	-0.00
80	0.31	0.32	2.88	1098	1076.49	-1.96
90	0.45	0.44	-1.93	869	885.85	1.94
100	0.57	0.57	-0.83	759	760.88	0.25
110	0.69	0.69	0.16	686	680.19	-0.85
120	0.79	0.79	1.10	640	628.78	-1.75
130	0.89	0.88	-0.36	595	596.38	0.23
140	0.95	0.95	-0.14	567	576.12	1.61
地位	平均幹材積(立米/本) パラメータ推定値			個体密度(本/ha) パラメータ推定値		
4	$A : 0.641033$ $B : -7.16394$ $k : 0.0349773$ $n : -3.16942$			$A : 662.913$ $B : -75.0648$ $k : 0.0481610$ $n : 0.702043$		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)
20	(.....))	(.....))
30	0.01	0.01	1.49	5160	5180.02	0.39
40	0.03	0.03	-0.27	3843	3779.34	-1.66
50	0.05	0.05	-1.92	2745	2792.45	1.73
60	0.09	0.09	-0.34	2087	2101.59	0.70
70	0.14	0.14	0.76	1629	1622.37	-0.41
80	0.20	0.20	1.55	1308	1294.00	-1.07
90	0.28	0.27	-1.70	1062	1072.36	0.98
100	0.34	0.34	0.03	933	925.25	-0.83
110	0.41	0.41	0.26	842	829.23	-1.52
120	0.46	0.46	0.41	769	767.49	-0.20
130	0.51	0.51	-0.29	714	728.28	2.00

付表-44 ストローブマツ自然間引き林分資料へのR関数当てはめ結果

LOT 2B		胸高直径 (inch)			個体密度(本/ Acre)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 58.6357			A : 402.232		
		B : 1.00480			B : -2.25114		
		k : 0.000865077			k : 0.0405475		
		n : 0.645515			n : 2.85052		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
12	2.1	2.0569	-2.05	(4265)	
16	2.7	2.8044	3.86	3682	3692.77	0.29	
21	3.6	3.6038	0.11	2786	2741.69	-1.59	
26	4.4	4.3123	-1.99	2052	2095.94	2.14	
31	5.05	4.9591	-1.80	1630	1649.13	1.17	
36	5.5	5.5599	1.09	1353	1334.21	-1.39	
41	6.0	6.1245	2.08	1144	1108.28	-3.12	
46	6.7	6.6596	-0.60	925	943.49	2.00	
51	7.2	7.1699	-0.42	815	821.43	0.79	
LOT 2C		胸高直径 (inch)			個体密度(本/ Acre)		
		パラメータ推定値			パラメータ推定値		
		A : 20.7800			A : 481.847		
		B : 1.04455			B : -42.9551		
		k : 0.00811768			k : 0.0997753		
		n : 0.726501			n : 0.604297		
林齢	観測値	計算値	誤差率(%)	観測値	計算値	誤差率(%)	
16	3.4	3.3972	-0.08	1893	1902.45	0.50	
21	4.4	4.4306	0.69	1493	1463.26	-1.99	
26	5.4	5.3430	-1.06	1133	1148.43	1.36	
31	6.2	6.1667	-0.54	898	926.19	3.14	
36	6.8	6.9203	1.77	789	772.37	-2.11	
41	7.6	7.6158	0.21	686	668.35	-2.57	
46	8.4	8.2618	-1.65	595	599.69	0.79	
51	8.8	8.8647	0.73	549	555.37	1.16	