

## 作業道計画路線における土工量の簡易推定法

誌名	日本林學會誌 = Journal of the Japanese Forestry Society
ISSN	0021485X
著者	市原, 恒一
巻/号	72巻2号
掲載ページ	p. 89-98
発行年月	1990年3月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター  
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council  
Secretariat



## 論 文

## 作業道計画路線における土工量の簡易推定法

市原 恒一\*

市原恒一：作業道計画路線における土工量の簡易推定法 日林誌 72：89~98, 1990  
 地形図上または踏査において設定した計画路線における最適な縦断線形の土工量を図表から迅速に選定する方法およびその計画高の簡単な計算方法を提案した。最適な縦断線形とは、切土量と盛土量がバランスし、起点と終点は地盤高に一致し、計画勾配の分散が指定値となる条件の下で、土工量が最小であるものである。最適な縦断線形を求めるために評価関数を作り、計画高と未定乗数で偏微分して非線形連立方程式を得た。この式から未定乗数と地盤高高低差の分散、および未定乗数と計画高高低差の分散などの関係を示す近似式を理論的に求め、縦断勾配の最大値が制限勾配以下になる計画勾配の分散の選定方法を提案した。さらに、計画高高低差の分散と地盤高高低差の分散から未定乗数を求めて土工量を推定する方法について例題をあげて説明した。その結果、図から得た土工量は非線形連立方程式を計算した値とおおむね一致した。つぎに計画高を求めるために非線形連立方程式を解き、さらにその近似解を求めた。近似解は簡単であるので、容易に計画高を得ることができる。

ICHIHARA, Kouichi: A simple method for estimating the earth-work volume of a logging road J. Jpn. For. Soc. 72: 89~98, 1990 A method for estimating earth-work volume and calculating formation-levels of the optimum longitudinal-slope of a logging road using tables and figures rapidly was studied. The meaning of the optimum longitudinal-slope is that the total earth-work volume is the least under the condition that the volume of waste material is zero, the formation-levels of the beginning and end point are equal to their ground-height and the variance of the longitudinal-slope is equal to appointed value. In obtaining the optimum longitudinal-slope, a performance index is made, and non-linear simultaneous equations are derived by partially differentiating the performance index with respect to formation-levels and an indeterminate coefficient. Three approximate equations that express the relationships between the indeterminate coefficient, the variance of difference of ground-height and the variance of difference of the formation-level are derived. The method of selection for the variance of slope of formation-level that are less than the permitted limit is suggested. For example using the figure that shows the relationship between the variance of difference of ground-height and the variance of difference of formation-level, the indeterminate coefficient is obtained, and earth-work volume is estimated. The earth-work volume that is obtained through the figure almost agrees with that obtained through non-linear simultaneous equations. In the next stage, obtaining formation-levels, non-linear simultaneous equations are solved, and then an approximate solution is obtained. The solution is so simple that the formation-levels are obtained easily.

## I. ま え が き

作業道は、林道と異なり、車両の走行性より建設費の低減および林地の保全などを重要視した構造とするのが望ましい。そのためには、縦断線形と平面線形は、地形に順応したものとし、土工量を少なく抑える必要がある。筆者は、地形図上または現地に設定されたいくつかの比較路線のなかから上述した適切な路線の土

工量を図表を用いて迅速に選定する方法、およびその計画高を簡易な計算で求める方法を検討している。

前報(1)において、切盛土量がバランスし、切盛土量の合計量、すなわち土工量を少なくし、さらに縦断勾配の変化を少なくして、各測点で変化する縦断勾配を設計する方法を得た。また、この方法で求めることができる土工量を、地形図上における地盤高の測定結果から推定する方法を考案した。さらに、地形図上にお

\* 森林総合研究所 For. and Forest Prod. Res. Inst., Ibaraki 305

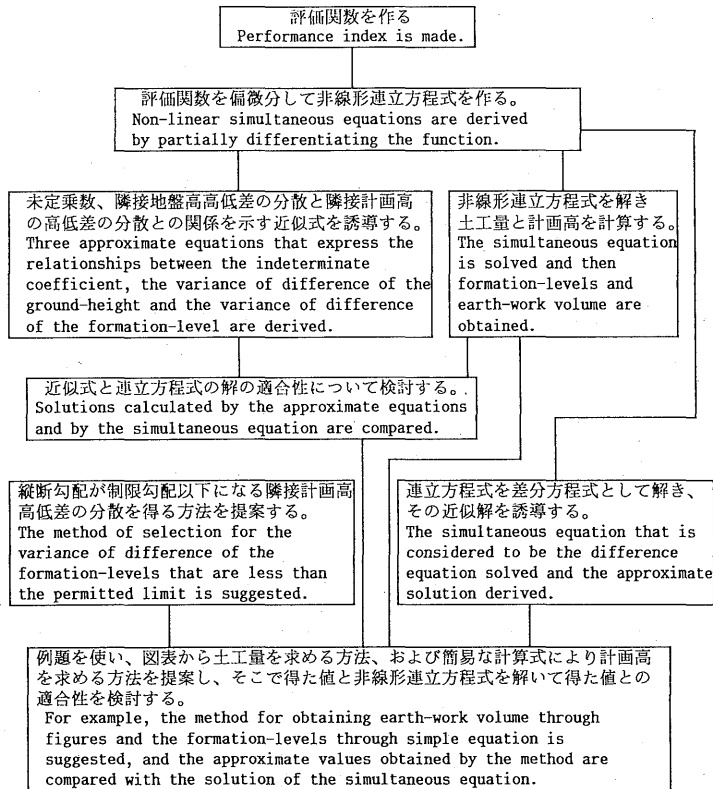


図-1. 本報告の構成  
Constitution of the report

ける予定路線の隣接する測点間 (25 m 等間隔) の地盤高の差の分散と土工量の関係を明らかにした。ただし、そこでは評価関数における土工量の項に対する隣接する測点間の計画高の差の分散の重みが決定できないため、土工量を決定することができなかった。

本報告では、はじめに土工量を図表から推定する方法について以下の手順で説明する。

1) 理論的に切盛土量のバランスをとるために導入した未定乗数と予定路線の隣接測点間の地盤高高低差の分散との関係を示す近似式、および未定乗数と隣接測点間の計画高高低差の分散との関係を示す近似式を誘導する。この近似式から測点間地盤高高低差の分散と計画高高低差の分散との関係を示す近似式を誘導する。

2) この三つの関係式の解と厳密に評価関数を解いて得た解との適合性を検討する。

3) 縦断勾配を制限勾配以下にするような隣接する計画高高低差の分散を選定する方法を提案する。この

分散を上記の関係式に適用する。

4) 図表を用いて土工量を推定する方法を例題で示し、そこから得た土工量と評価関数を解いて得た値との適合性を検討する。

つぎに、計画高を簡単な式から計算する方法について以下の手順で説明する。

1) 計画高の関係を表す漸化式を解いて、任意地点の計画高を得る。

2) 漸化式の解を簡略化して近似解を誘導する。

3) 近似解と漸化式を解いて得た計画高との適合性を検討する。

図-1 には、本報告の構成を示したフローチャートを示す。

## II. 評価関数

前報では隣接測点間水平距離、山腹傾斜角、切盛法面勾配および幅員を一定、切土量と盛土量が等しく、起点・終点間の計画高を指定しないなどの仮定の下で

作った評価関数  $J_3$  を使い、地形図上における簡易な土工量推定法について検討した。

本報告では、土工量を最小にして縦断勾配を制限値以下にする分散を指定値にする路線の縦断線形を求める評価関数  $J$  を作成した。(1)式は、評価関数である。

$$\begin{aligned}
 J = & 1/2 \sum_{i=1}^{n-1} [E(k+X_i-Y_i)^2 \\
 & + E(k+X_{i+1}-Y_{i+1})^2 + C(k+Y_i-X_i)^2 \\
 & + C(k+Y_{i+1}-X_{i+1})^2] \\
 & + \lambda_1/2 \sum_{i=1}^{n-1} [E(k+X_i-Y_i)^2 \\
 & + E(k+X_{i+1}-Y_{i+1})^2 \\
 & - C(k+Y_i-X_i)^2 - C(k+Y_{i+1}-X_{i+1})^2] \\
 & + \lambda_2/2 \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (X_i-X_{i+1}+g)^2/l^2 - (n-1)S_0 \right] \\
 & + \mu_1(X_1-Y_1) + \mu_2(X_n-Y_n) \quad (1)
 \end{aligned}$$

ただし、 $g=(Y_1-Y_n)/(n-1)$ 、 $l$  は測点間水平距離、 $n$  は測点数、 $X_i$  および  $Y_i$  はそれぞれ  $i$  番目の計画高および地盤高、 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  は未定乗数、 $S_0$  は勾配が制限勾配以下になる縦断勾配の分散である。 $\lambda_1$  は前報の評価関数  $J_3$  における  $\lambda$  に相当する。

$E, C, k$  は路線と直交する山腹勾配を  $\alpha$ 、盛土および切取法面勾配を  $\beta$  および  $\gamma$ 、幅員を  $L$  とした場合に次式から求めることができる。

$$\begin{aligned}
 k &= \alpha L/2 \\
 E &= \beta/\{2\alpha(\beta-\alpha)\} \\
 C &= \gamma/\{2\alpha(\gamma-\alpha)\}
 \end{aligned} \quad (2)$$

前報と同様に、これらの値および測点間水平距離は、すべての測点において一定であるとした。

(1)式の評価関数の内容は、以下のとおりである。第1項は路線単位長当たりの切土量と盛土量の和を最小にする条件である。第2項は切土量と盛土量のバランスをとる制約条件である。第3項は、隣接する測点間の計画勾配の分散を定数  $S_0$  にする制約条件である。第4項および第5項は起点と終点の計画高をそれぞれの地盤高と一致させる条件である。第1項以外は、前報の評価関数  $J_3$  と異なる。

(1)式を  $X_i (i=2, 3, \dots, n-1)$ 、 $\lambda_1, \lambda_2$  で偏微分すると、(3)~(5)式を得る。

$$\begin{aligned}
 \partial J/\partial X_i &= (X_i-Y_i)[E+C+\lambda_1(E-C)] \\
 &+ k[E-C+\lambda_1(E+C)] \\
 &+ \lambda_2(-X_{i-1}+2X_i-X_{i+1})/l^2 \\
 &(i=2, 3, \dots, n-1) \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\partial J/\partial \lambda_1 = \sum_{i=1}^{n-1} [E(k+X_i-Y_i)^2$$

$$\begin{aligned}
 &+ E(k+X_{i+1}-Y_{i+1})^2 \\
 &- C(k+Y_i-X_i)^2 \\
 &- C(k+Y_{i+1}-X_{i+1})^2] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\partial J/\partial \lambda_2 = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i-X_{i+1}+g)^2/l^2 - (n-1)S_0 \quad (5)$$

(3)式は、 $X_1=Y_1, X_n=Y_n$  を代入して、 $\partial J/\partial X_i=0, \partial J/\partial \lambda_1=0, \partial J/\partial \lambda_2=0$  とおくと、 $N$ 次元非線形連立方程式を得る。

起点と終点の計画高を地盤高に一致させるため、その地点の土工量は他の部分にくらべて小さく、無視できると仮定すると、路線単位長当たりの平均土工量  $W$  は(6)式に近似できる。

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=1}^{n-1} [E(k+X_i-Y_i)^2 + E(k+X_{i+1}-Y_{i+1})^2 \\
 &+ C(k+Y_i-X_i)^2 + C(k+Y_{i+1}-X_{i+1})^2]/(n-1) \\
 &\doteq \sum_{i=1}^{n-1} [E(k+X_i-Y_i)^2 + C(k+Y_i-X_i)^2]/n \quad (6)
 \end{aligned}$$

$\lambda_1$  と  $W$  の間には、次の関係があることを前報で明らかにした。

$$\begin{aligned}
 W &= 8kCE[E-C+(E+C)\lambda_1] \\
 &/[(E-C)[E+C+(E-C)\lambda_1] \quad (7)
 \end{aligned}$$

### III. 未定乗数、隣接測点間地盤高の高低差の分散および計画高の高低差の分散の近似関係

隣接測点間の計画高の高低差の分散  $S_p$  を(8)式、地盤高の高低差の分散  $S_g$  を(9)式とする。

$$S_p = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i-X_{i+1}+g)^2/(n-1) \quad (8)$$

$$S_g = \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i-Y_{i+1}+g)^2/(n-1) \quad (9)$$

はじめに、 $S_g$  と  $\lambda_1$  の関係を求める。(3)式を(10)式のとおりに変形する。

$$\begin{aligned}
 &-d(X_{i-1}-Y_{i-1})+[E+C+\lambda_1(E-C)+2d] \\
 &\quad \times (X_i-Y_i)-d(X_{i+1}-Y_{i+1}) \\
 &= -[E-C+\lambda_1(E+C)]k-d(Y_{i-1}-Y_i+g) \\
 &\quad +d(Y_i-Y_{i+1}+g) \quad (10)
 \end{aligned}$$

ただし、 $d=\lambda_2/l^2$ 、 $d$  は前報の評価関数  $J_3$  における  $D$  に相当するものである。

(10)式の両辺を二乗して、それぞれ  $i=2$  から  $n-1$  まで加える。さらに、 $(Y_{i-1}-Y_i+g)$  と  $(Y_i-Y_{i+1}+g)$  および  $(X_{i-1}-Y_{i-1})$  と  $(X_i-Y_i)$  と  $(X_{i+1}-Y_{i+1})$  はそれぞれ互いに無関係で、それぞれの積和は近似的に零であると仮定すると、つぎの近似式を得る。

$$\begin{aligned}
 &[[E+C+\lambda_1(E-C)+2d]^2+2d^2] \sum_{i=1}^n (X_i-Y_i)^2/k^2 n \\
 &\doteq [E-C+\lambda_1(E+C)]^2+2d^2 S_g/k^2 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$(X_i - Y_i)$  の平均値を  $\overline{x-y}$  とすると, (12)式が成立することを前報で示した。

$$\overline{x-y} = -\{E-C+\lambda_1(E+C)\}k/\{E+C+\lambda_1(E-C)\} \quad (12)$$

(12)式を

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2/n \\ &= \sum_{i=1}^n \{X_i - Y_i - (\overline{x-y})\}^2/n - (\overline{x-y})^2 \end{aligned}$$

へ代入すると(13)式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2/n &= k^2[E^2 - C^2 + \{E^2 + 6EC + C^2\}\lambda_1] \\ & \quad / \{[E-C]\{E+C+(E-C)\lambda_1\}\} \end{aligned} \quad (13)$$

(11)式と(13)式から  $\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2/n$  を消去して,

$$Q(s) = d/[E+C+(E-C)s]$$

とおくと,  $S_g$  と  $\lambda_1$  の関係を示す近似式, (14)式を得る。

$$\begin{aligned} S_g/k^2 &= 4EC\{1+2\lambda_1(E+C)/(E-C)+\lambda_1^2\} \\ & \quad \times \{2+4Q(\lambda_1)+3Q^2(\lambda_1)\}/d^2 \\ & \quad + \{(E-C)+(E+C)\lambda_1\}^2 \\ & \quad \times \{4Q(\lambda_1)+3Q^2(\lambda_1)\}/d^2 \end{aligned} \quad (14)$$

前報では  $\lambda_1$  の最小値を  $\lambda_0$  とすると,

$$\lambda_0 = -k(E^{1/2} - C^{1/2})/(E^{1/2} + C^{1/2})$$

となること, および隣接地盤高の高低差の分散  $S_g$  が零である場合には,  $\lambda_1 = \lambda_0$  であることを示した。そこで, (14)式を  $\lambda_1 = \lambda_0$  のとき  $S_g = 0$  となるように補正して, (15)式を作る。これを,  $\lambda_1$  と  $S_g$  の関係を示す式とする。

$$\begin{aligned} S_g/k^2 &= 4EC\{1+2\lambda_1(E+C)/(E-C)+\lambda_1^2\} \\ & \quad \times \{2+4Q(\lambda_1)+3Q^2(\lambda_1)\}/d^2 \\ & \quad + \{(E-C)+(E+C)\lambda_1\}^2 \\ & \quad \times \{4Q(\lambda_1)+3Q^2(\lambda_1)\}/d^2 \\ & \quad - 4EC\{1+2\lambda_0(E+C)/(E-C)+\lambda_0^2\} \\ & \quad \times \{2+4Q(\lambda_0)+3Q^2(\lambda_0)\}/d^2 \\ & \quad - \{(E-C)+(E+C)\lambda_0\}^2 \\ & \quad \times \{4Q(\lambda_0)+3Q^2(\lambda_0)\}/d^2 \end{aligned} \quad (15)$$

つぎに,  $\lambda_1$  と  $S_p$  の関係を求める。(3)式をさらに変形すると,

$$\begin{aligned} & (X_i - Y_i)\{E+C+\lambda_1(E-C)\} \\ & \quad + k\{E-C+\lambda_1(E+C)\} \\ &= d\{(X_{i-1} - X_i + g) - (X_i - X_{i+1} + g)\} \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式の両辺を二乗して,  $i=2$  から  $n-1$  までそれぞれ加える。 $(X_{i-1} - X_i + g)$  と  $(X_i - X_{i+1} + g)$  が無相関

であると仮定し, (12)式と(13)式を代入すると,  $S_p$  と  $\lambda_1$  の関係を表す近似式である(17)式を得る。

$$S_p/k^2 = 8EC[1+2\lambda_1(E+C)/(E-C)+\lambda_1^2]/d^2 \quad (17)$$

$S_g$  の場合と同様に, 計画高の高低差の分散が零である路線の  $\lambda_1$  は  $\lambda_0$  となるから, (17)式を補正して(18)式を作る。これが  $\lambda_1$  と  $S_p$  の関係である。

$$\begin{aligned} S_p/k^2 &= 8EC(\lambda_1 - \lambda_0) \\ & \quad \times [2(E+C)/(E-C)+\lambda_1+\lambda_0]/d^2 \end{aligned} \quad (18)$$

最後に,  $S_g$  と  $S_p$  の関係を求める。(15)式と(18)式より  $d$  を消去して,

$$\begin{aligned} T &= [8EC(\lambda_1 - \lambda_0)\{2(E+C)/(E-C)+\lambda_1+\lambda_0\}]^{-1/2} \\ R(s) &= 4EC\{1+2s(E+C)/(E-C)+s^2\} \\ & \quad + \{(E-C)+(E+C)s\}^2 \end{aligned}$$

とおくと, 隣接測点間の地盤高の高低差の分散  $S_g$  と計画高の高低差の分散  $S_p$  の関係を示す(19)式を得る。

$$\begin{aligned} S_g &= S_p + 4S_p^{1/2}Tk\{R(\lambda_1)Q(\lambda_1) - R(\lambda_0)Q(\lambda_0)\} \\ & \quad + 3k^2\{R(\lambda_1)Q(\lambda_1)^2 - R(\lambda_0)Q(\lambda_0)^2\} \end{aligned} \quad (19)$$

#### IV. 近似式および連立方程式による計算値の比較

林道・作業道の路線計画に一般に用いられている5千分の1地形図上において, 仮想路線を設定し, それに沿って25m間隔で地盤高を測定した。等高線の間隔は10mであるが, それを10等分して1m単位で地盤高を読んだ。また, 多様な形態をなす地盤高を得るため, 筆者の想定した地盤高についても検討した。これらの地盤高を用いて(3)~(5)式の連立方程式をニュートン・ラプソン法で解いて,  $\lambda_1$ ,  $S_p$  および  $S_g$  を求めた。以降これらの解を厳密解と略称する。同時に, 近似式である(15), (18)および(19)式により上記3因子の数値を求めた。以降これらの解を近似解と略称する。この項では, 厳密解と近似解を比較する。

図-2および3には, それぞれ  $S_g$  と  $Z$  ( $Z = \lambda_1 - \lambda_0$ ) および  $S_p$  と  $Z$  の関係を示した。図中の点列は厳密解, 実線は近似解, 点線は近似解に定数を乗じることにより近似解を補正したものである。 $E=2.0$ ,  $C=1.2$ ,  $k=1$  として,  $d=0.1, 1.0$  および10の3とおりの関係について計算を行った。

$S_g$  と  $Z$  の関係は, 以下のとおりである。図中の点線は  $d=0.1$  および10の近似解にそれぞれ0.85および0.7を乗じた補正曲線である。 $d=0.1$  では,  $Z < 0.01$  において近似解と補正曲線はほぼ直線であるのに対し, 厳密解は急激に降下しており, その差は大きく, 点列

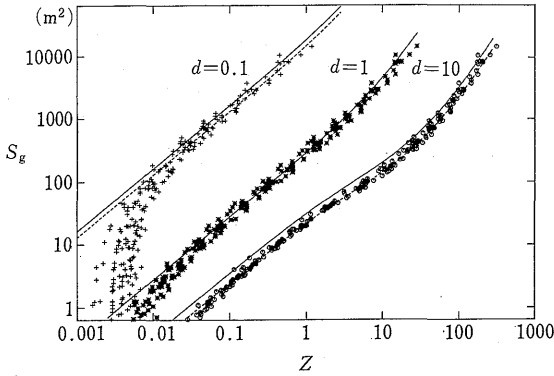


図-2. パラメータ  $Z(Z=\lambda_1-\lambda_0)$  と地盤高測点間高低差の分散  $S_g$  の関係  
Relationship between parameter  $Z$  and variance of difference of ground-height  $S_g$

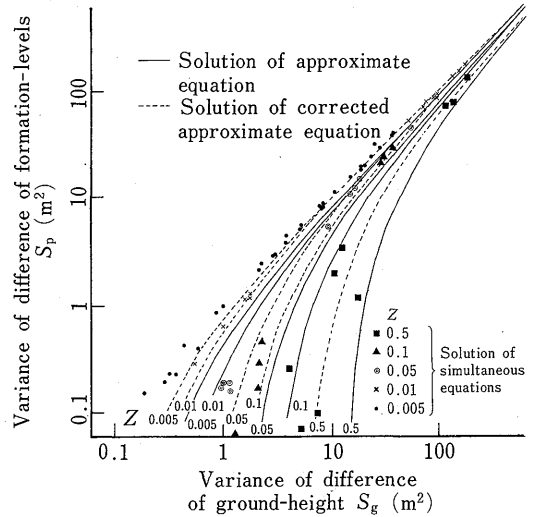


図-4. 地盤高測点間高低差の分散  $S_g$  と計画高測点間高低差の分散  $S_p$  の関係  
Relationship between variance of difference of ground-height and variance of difference of formation-level

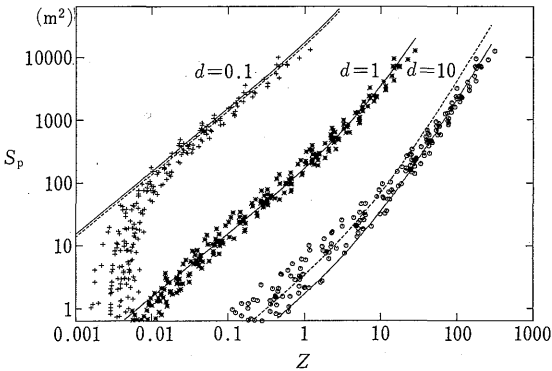


図-3. パラメータ  $Z(Z=\lambda_1-\lambda_0)$  と計画高測点間高低差の分散  $S_p$  の関係  
Relationship between parameter  $Z$  and variance of difference of formation-level  $S_p$

のばらつきも大きい。しかし、 $Z > 0.01$  において厳密解は補正曲線とおおむね一致している。 $d=1.0$  では、近似解と厳密解が一致している。とくに、 $Z > 0.01$  において厳密解のばらつきは小さく、近似解ときわめて一致している。 $d=10$  では厳密解のばらつきは最も小さいが、近似解の上端を通っている。補正曲線は厳密解ときわめて一致している。補正曲線の方程式は、(15)式の左辺に

$$A_1 = \exp \{-0.453(d^{1/5}-1)^2\}$$

をかけたものである。

$S_p$  と  $Z$  の関係は、以下のとおりである。図中の点線は  $d=0.1$  および  $10$  の近似解にそれぞれ  $0.90$  および  $2.0$  を乗じた補正曲線である。 $d=0.1$  では、 $S_g$  と同様

に、 $Z < 0.01$  において近似解と補正曲線はほぼ直線であるのに対して、厳密解は急激に降下しており、その差は大きく、そのばらつきも大きい。しかし、 $Z > 0.01$  において補正曲線とおおむね一致している。 $d=1.0$  では、厳密解と近似解はきわめて一致しており、厳密解のばらつきは小さい。しかし、 $Z < 0.01$  において直線が上位にある。 $d=10$  では、 $Z < 10$  において補正曲線は厳密解の中心を通っているが、 $Z > 20$  では近似解が厳密解の中心付近にある。補正曲線の方程式は(18)式の左辺に

$$A_2 = \exp \{0.139(d^{1/2}-1)\}$$

をかけたものである。

上述したとおり、 $S_p$  および  $S_g$  の厳密解と近似解を比較した。その結果、 $d=1$  の場合には両者はきわめて一致した。しかし、それ以外、とくに  $d$  が大きくなると差が大きくなり、それは  $d$  の関数になる。したがって、近似式の左辺に  $d$  の関数を乗じることにより、厳密解の傾向とおおむね一致する補正曲線を得た。

$S_g$  および  $S_p$  の関係は、図-4 のとおりである。図中の点は  $Z$  が  $0.0045 \sim 0.0055$ ,  $0.009 \sim 0.010$ ,  $0.045 \sim 0.055$ ,  $0.090 \sim 0.105$  および  $0.45 \sim 0.55$  の範囲にある  $S_p$  と  $S_g$  の厳密解の関係である。ここでは、これらをそれぞれ  $Z=0.005, 0.01, 0.05, 0.1$  および  $0.5$  とよぶ。図中の実線は(19)式による近似解、点線は(19)式の右辺

に  $Z$  と  $S_p$  の関数を乗じて (20) 式とした補正曲線である。

$$S_g = [S_p + 4S_p^{1/2} T k \{R(\lambda_1)Q(\lambda_1) - R(\lambda_0)Q(\lambda_0)\} + k^2 \{R(\lambda_1)Q(\lambda_1)^2 - R(\lambda_0)Q(\lambda_0)^2\}] \cdot S_p^{a_1} \quad (20)$$

ただし、 $a_1 = 0.04 \cdot \log(Z) + 0.12$

$S_p$  が小さいと補正曲線と厳密解との適合度が良好でなく、とくに  $Z = 0.005$  で悪い。しかし、 $S_p > 0.005$  ではおおむね両者は一致している。したがって、全体として補正曲線は厳密解と一致していると考えられる。

## V. 隣接測点間の計画勾配分散の求めかた

ここでは、測点間の計画勾配が許容勾配以下になる計画勾配の分散  $S_0$  を求める方法を示す。平均勾配を  $\mu$  とおき、 $\mu$  と測点間の計画勾配との偏差を  $U_i$  とすると、(21) 式が成り立つ。

$$U_i = (X_{i+1} - X_i) / l - \mu \quad (21)$$

$U_i$  は正規分布をなす母集団からの無作為標本とする。

正規分布において、平均値から標準偏差  $\sigma_0$  の約 1.96 倍以上離れた部分の分布全体に対する比率、すなわち 1.96  $\sigma_0$  の両側確率は、約 0.05 である。ここでは、制限勾配を  $\gamma$  として、母集団の標準偏差  $\sigma$  を

$$\sigma = (\gamma - \mu) / 2 \quad (22)$$

とすると、約 95% が  $|\gamma - \mu|$  以下の範囲に入る。すなわち、測点間の計画勾配が制限勾配以下になる最小確率は 95% である。

この母集団から抽出された大きさ  $N$  の無作為標本の分散を、

$$S^2 = \sum_{i=1}^N U_i^2 / N \quad (23)$$

とすると、 $NS^2/\sigma^2$  は自由度  $N-1$  の  $\chi^2$  分布に従い、 $NS^2/\sigma^2$  が  $\chi_1^2$  より小さい値をとる確率を  $\alpha$ 、 $\chi_2^2$  より大きな値をとる確率を  $\alpha$  とすると、標本分散  $S^2$  が確率  $(1-2\alpha)$  の信頼区間は次式で与えられる(2)。

$$\sigma^2 \chi_1^2 / N < S^2 < \sigma^2 \chi_2^2 / N$$

この式に等号が成立しているとする、 $S^2$  の最小値は(24)式で与えられる。

$$S^2 = \sigma^2 \chi_1^2 / N \quad (24)$$

(22) 式を(24)式に代入すると、(25)式が成立する。

$$S^2 = (\gamma - \mu)^2 \chi_1^2 / 4N \quad (25)$$

$S^2 = S_0$  として、(25) 式を隣接測点間の計画勾配を制限勾配以下に抑える分散  $S_0$  を与える式とする。ただし、 $N$  は一路線の区間数であるから、 $n$  を測点数とすると、 $\chi_1^2$  の自由度は  $(n-2)$ 、上側確率は  $(1-\alpha)$  とな

るから、 $\chi_1^2(n-2, 1-\alpha)$  を表から読みとる。

上述したとおり、正規分布をなす母集団において、計画勾配が制限勾配以下になる最小確率は、約 0.95 である。また、 $\chi^2$  分布において、計画勾配の分散  $S_0$  が最小値  $\sigma^2 \chi_1^2 / N$  より小さくなる確率は、 $(1-\alpha)$  である。したがって、(25) 式を用いる場合、制限勾配以下になる最小確率  $p$  は(26)式より求めることができる。

$$p = 0.95(1-\alpha) \quad (26)$$

$\alpha = 0.025$  とすると  $p = 0.926$  になる。

## VI. 土工量の推定方法

上記した近似計算などを使用した土工量の推定方法について、2 題の例とともに説明する。なお、図-5 は、計算過程を表すフローチャートである。縦断面図は、図-6 と 7 のとおりである。例題 1 および 2 の隣接地盤高の測点間高低差の分散  $S_g$  は、それぞれ 7.063 および 4.369 である。測点間距離  $l$  は 25 m とした。これらの数値と計算結果(近似解)は、表-1 に示した。

1) 隣接測点間計画勾配を制限勾配以下にする計画勾配の分散  $S_0$  および高低差の分散  $S_p$  を以下のとおりにして求める。

はじめに、 $S_0$  の信頼区間を与える  $\chi^2$  分布の片側確率  $\alpha$  のパーセント点を統計表から読みとる。この例では、 $\alpha = 0.025$  として、例題 1 では  $\chi^2(34, 0.975) = 19.81$ 、例題 2 では  $\chi^2(44, 0.975) = 28.40$  となる。この値と区間数  $n$ 、平均勾配  $\mu$  および制限勾配(10%とした)を(25)式に代入して  $S_0$  を得る。

つぎに、 $S_p$  を次式から得る。

$$S_p = S_0 \cdot l^2$$

$S_0$  および  $S_p$  は、例題 1 ではそれぞれ 0.00138 および 0.863、例題 2 ではそれぞれ 0.000934 および 0.584 である。

2) 未定乗数  $\lambda_1$  を求める。

図-4 において  $S_p$  と  $S_g$  の関係より  $Z$  を求め、さらに  $\lambda_1$  を計算する。 $\lambda_1$  は例題 1 では 0.073、例題 2 では -0.037 になった。

3) 土工量を求める。

$\lambda_1$  を(7)式に代入して、単位長当たりの平均土工量を計算する。例題 1 では 7.61 m<sup>3</sup>/m、例題 2 では 5.16 m<sup>3</sup>/m となった。

連立方程式((3)~(5)式)を解いて、最急勾配が 10% となる縦断線形を厳密に求めた場合の土工量などの諸量(厳密解)を表-1 に示す。土工量と  $\lambda_1$  の近似解と厳密解は、例題 1 では、おおむね一致した。しか

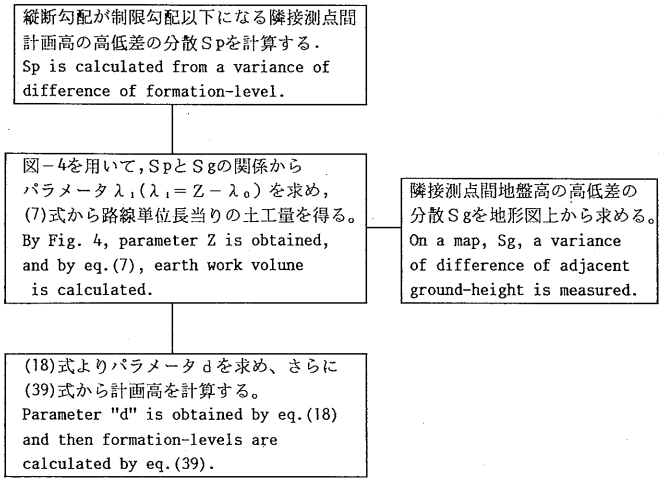


図-5. 土工量と計画高を推定するためのフローチャート  
 Flow chart for estimation of earth-work volume and formation-levels

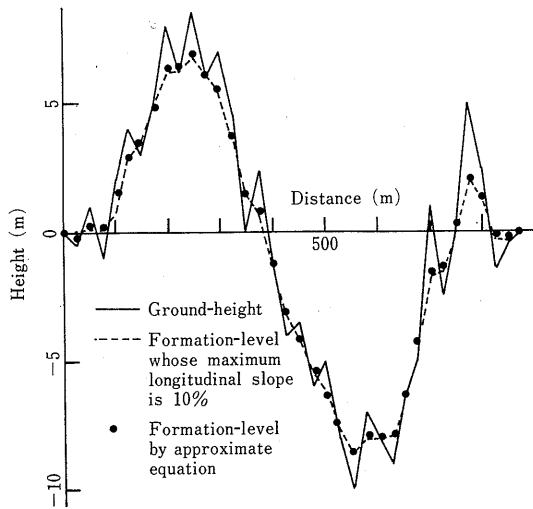


図-6. 例1の縦断面図  
 Profile of example 1

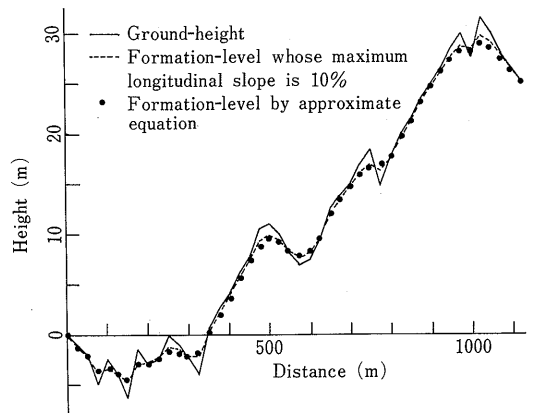


図-7. 例2の縦断面図  
 Profile of example 2

し、例題2では、近似解が若干大きい。2例とも、 $S_p$ の近似解は厳密解にくらべて小さい。この方法では、安全率を大きくみて、約95%以上の確率で制限勾配以下になる  $S_p$  を計算するため、連立方程式を解いて得た数値より土工量は大きくなり、 $S_p$  は小さくなったと考える。

VII. 簡易な計画高の計算方法

計画高は(3)~(5)式の連立方程式をニュートン・ラプソン法で解けば求めることができる。しかし、ここでは  $\lambda$  の値が上記方法により、 $d$  が(18)式より明らかになった後に、簡易な計画高の近似値を得る方法について説明する。

(3)式を変形すると次式になる。



表-1. 例題の結果および連立方程式による解との比較  
Results of examples and comparison of the results  
with solution of simultaneous equation

	Example 1	Example 2
Number of survey points $n$	36	46
Horizontal distance between survey points $l$ (m)	25	25
Variance of difference of ground-height $S_g$ ( $m^2$ )	7.063	4.369
Average value of slope of ground-height (%)	0	2.22
Maximum value of slope of ground-height (%)	24	20
Permitted limit of slope of formation-level (%)	10	10
$\chi^2(n-2, 0.975)$	19.81	28.40
Variance of slope of formation-level $S_b$ (by Eq.(25))	0.00138	0.000934
Variance of difference of formation-level $S_p$	0.863	0.584
$Z$ (by Fig.4)	0.20	0.09
Indeterminate coefficient $\lambda_1$	0.073	-0.037
Average value of earth-work volume $W$ ( $m^3/m$ ) (by Eq.(7))	7.61	5.16
Calculated values of simultaneous equation under the condition that the maximum slope of the formation-level is equal to the permitted limit (10%)		
$Z$	0.22	0.069
$S_b$	1.456	1.594
$W$	7.41	4.62

$$X_i = (a+2)X_{i-1} - X_{i-2} - aY_{i-1} + b \quad (27)$$

ただし,

$$a = \{E(1+\lambda_1) + C(1-\lambda_1)\}/d$$

$$b = \{E(1+\lambda_1) - C(1-\lambda_1)\}/d$$

### 1. 計画高 $X_2$ の計算

(27)式を差分方程式として解いて計画高を計算する場合、初期値として、 $X_1$  と  $X_2$  が必要である。しかし、この計画高を求める問題では  $X_1$  と  $X_n$ 、すなわち起点と終点の値が与えられているだけである。そこで、まずはじめに  $X_2$  を求める方法について説明する。

(27)式で  $i=3$  および  $i=4$  とおいた2式から  $X_3$  を消去した式を作る。つぎに、その式と  $i=5$  と置いた式から  $X_4$  を消去する。この操作を繰り返すと  $i$  番目には次式を得る。

$$X_i = X_2 \cdot G_i - Y_1 \cdot U_i - a \sum_{j=2}^{i-1} Y_j \cdot V_{i-j+2} + bW_i \quad (i=3, 4, \dots, n-1) \quad (28)$$

ただし、 $G_i, U_i, V_{i-j}$  および  $W_i$  は定数である。

係数  $G_i, U_i, V_{i-j}$  は、以下のとおりにして求めるこ

とができる。すなわち、(27)式から明らかであるが、 $G_i, U_i$  および  $V_{i-j}$  は初期値が異なるだけで、同じ数列であるから、 $G_i, U_i$  および  $V_{i-j}$  を  $t_i$  とおくと、(29)式の漸化式が成り立つ。

$$t_{i+2} = (a+2)t_{i+1} - t_i \quad (29)$$

初期値は、 $G_3 = a+2, G_4 = (a+2)^2 - 1, U_3 = 1, U_4 = a+2, V_3 = 1, V_4 = a+2$  である。

(29)式に  $Z$  変換を適用して解く。 $Z$  変換とは、連続系におけるラプラス変換に相当するものである。(3)。(29)式を  $Z$  変換すると、(30)式になる。

$$Z^2 T(z) - Z^2 t_0 - Z t_1 - (a+2)(ZT(z) - Zt_0) + T(z) = 0 \quad (30)$$

ただし、 $T(z)$  は数列  $t_i$  の  $Z$  変換、 $t_0$  と  $t_1$  は数列  $t_i$  の初期値である。

$t_0 = 1, t_1 = a+2$  として(30)式を変形すると、(31)式が成り立つ。

$$T(z) = [1/2 + A_2/A_1][Z/\{Z - A_2 - A_1/2\}] + [1/2 - A_2/A_1][Z/\{Z - A_2 + A_1/2\}] \quad (31)$$

ただし、

$$A_1 = \{a(a+4)\}^{1/2}$$

$$A_2 = (a+2)/2$$

(31)式を逆  $Z$  変換すると、(32)式が成り立つ。

$$t_i = [1/2 + A_2/A_1][A_2 + A_1/2]^i + [1/2 - A_2/A_1][A_2 - A_1/2]^i \quad (32)$$

初期値を考慮すると、 $t_i$  と  $G_i, U_i$  および  $V_{i-j}$  の関係は次式のとおりである。

$$G_i = t_{i-2}$$

$$U_i = V_{i-j} = t_{i-3}$$

つぎに、 $b$  の係数  $W_i$  を求める。数列  $W_i$  の初期値は、 $W_3 = 1, W_4 = a+3$  である。 $s_{i-3} = W_i$  とおくと、(27)式から、 $s_i$  は(33)式の漸化式に従うことが明らかであろう。

$$s_{i+1} = (a+2)s_{i+1} - s_i + 1 \quad (33)$$

(33)式を  $Z$  変換する。 $S(z)$  を数列  $s_i$  の  $Z$  変換とする。

$$Z^2 S(z) - Z^2 s_0 - Z s_1 - (a+2) \times \{ZS(z) - Zs_0\} + S(z) = Z/(Z-1) \quad (34)$$

$s_0 = 1, s_1 = a+3$  を代入して変形すると、(35)式になる。

$$S(z) = [1+2(1+A_1)/\{A_1(A_1+a)\}] \times [Z/\{Z - A_2 - A_1/2\}] \times [1+2(1-A_1)/\{A_1(A_1-a)\}] \times [Z/\{Z - A_2 + A_1/2\}] - Z/\{a(Z-1)\} \quad (35)$$

(35)式を逆変換すると、(36)式になる。

$$s_i = [1 + 2(1 + A_1) / \{A_1(A_1 + a)\}] [A_2 + A_1/2]^i + [1 + 2(1 - A_1) / \{A_1(A_1 - a)\}] [A_2 - A_1/2]^i - 1/a \quad (36)$$

したがって、 $W_i = s_{i-3}$  とすれば  $W_i$  を求めることができる。

(28)式において  $i = n$  として、上記した  $G_n, U_n, W_n$  の計算値および  $V_{n-j}$  の計算値と地盤高  $Y_j (j = 2, 3, \dots, n-1)$  を代入する。また、終点の計画高は地盤高と一致しているから、 $X_n = Y_n$  とすると、 $X_2$  は(37)式から計算することができる。

$$X_2 = [Y_n + Y_1 \cdot U_n + a \sum_{j=2}^{n-1} Y_j \cdot V_{n-j+2} - b \cdot W_n] / G_n \quad (37)$$

### 2. 計画高 $\{X_i (i > 2)\}$ の計算

$X_2$  が明らかになった後、(27)式に  $i = 3$  を代入して  $X_3$  を求め、さらに  $i = 4, 5, \dots, n-1$  と順に代入して、 $X_i$  を逐次求めることができる。しかし、この方法では(27)式に  $Y_i$  が入っていないため誤差が大きくなり、 $X_n$  が  $Y_n$  に収束しないで発散するケースが多い。 $X_2$  を求めた場合と同じ方法で  $X_3$  以降を計算する。

$X_1$  から  $X_{m-1} (m = 3, 4, \dots, n)$  まで既知であるとして、 $X_m$  を求める方法について説明する。 $X_2$  を求める場合と同様に、はじめに  $i = m+1$  および  $i = m+2$  とした(27)式から  $X_{m+1}$  を消去する。さらに、 $i = m+3, m+4, \dots, n-1$  として、 $X_{m+2}, X_{m+3}, \dots, X_{n-2}$  を逐次消去する。すなわち、 $X_2$  の場合にくらべて  $i$  の出発点が  $m-2$  だけずれる。したがって、(38)式から  $X_m$  を計算することができる。

$$X_m = [Y_n + X_{m-1} \cdot U_{n-m+2} + \sum_{j=m}^{n-1} Y_j \cdot V_{n-j+2} - b \cdot W_{n-m+2}] / G_{n-m+2} \quad (m = 2, 3, \dots, n-1) \quad (38)$$

### 3. 近似計算法

(38)式は、 $n$  が小さい場合には、簡単に計算することができる。しかし、 $n$  が大きくなるとこの計算量は膨大になる。ここでは、計算量を減少させるために、(38)式の近似計算法について検討する。

(32)式の第2項の  $[A_2 - A_1/2]$  は  $a = 0$  のとき1で、単調減少関数であるから、必ず1以下である。したがって、 $i$  が大きい場合または  $a$  が1より大きい場合には、第1項にくらべると極めて小さくなるため、

$$[1/2 - A_2/A_1][A_2 - A_1/2]^i \approx 0$$

とする。同様に、(36)式の第2項も無視する。(36)式の第3項  $(-1/a)$  も  $a$  が1より大きい場合には、その

絶対値が第1項にくらべて小さくなるため、無視する。さらに、(32)式と(36)式の第1項で  $i > 6$  の場合、すなわち  $1/(A_2 + A_1/2)^6$  以下も小さいから無視する。この

表-2. 例題1の地盤高と計画高  
Ground heights and formation levels of example 1 (m)

Points	Ground-heights	Formation-level 1	Formation-level 2	Formation-level 3
1	0.	0.	0.	0.
2	-0.5	-0.14	-0.16	-0.19
3	1.0	0.27	0.23	0.17
4	-1.0	0.24	0.26	0.18
5	2.0	1.63	1.59	1.51
6	4.0	2.93	2.86	2.77
7	3.0	3.52	3.47	3.40
8	5.0	4.83	4.75	4.68
9	8.0	6.25	6.10	6.05
10	6.0	6.30	6.17	6.15
11	8.5	6.83	6.65	6.63
12	6.0	6.06	5.88	5.89
13	7.0	5.52	5.30	5.33
14	4.5	3.78	3.59	3.64
15	0.0	1.55	1.42	1.48
16	2.5	0.89	0.67	0.75
17	-1.0	-1.10	-1.29	-1.20
18	-4.0	-3.05	-3.22	-3.11
19	-3.5	-4.16	-4.23	-4.27
20	-6.0	-5.48	-5.55	-5.58
21	-5.0	-6.13	-6.24	-6.26
22	-8.0	-7.60	-7.68	-7.67
23	-10.0	-8.50	-8.57	-8.54
24	-7.0	-7.89	-8.03	-7.98
25	-8.0	-7.91	-8.04	-7.98
26	-9.0	-7.72	-7.82	-7.74
27	-6.5	-6.21	-6.35	-6.26
28	-5.0	-4.31	-4.49	-4.39
29	1.0	-1.66	-1.94	-1.84
30	-2.5	-1.32	-1.51	-1.42
31	0.0	0.22	-0.01	0.09
32	5.0	2.07	1.77	1.84
33	2.5	1.39	1.17	1.23
34	-1.5	-0.16	-0.23	-0.21
35	-0.5	-0.27	-0.32	-0.31
36	0.	0.	0.	0.

計画高1, 近似解  $\lambda = 0.073, d = 4.68$  を用いて近似式(39式)から得た計画高; 計画高2, 制限勾配を10%として、連立方程式を解いて得た計画高 ( $\lambda = 0.093, d = 4.00$ ); 計画高3, 連立方程式を解いて得た  $\lambda_1 = 0.093, d = 4.00$  を用いて近似式(39式)から得た計画高。

Formation-level 1, Calculated value of approximate Eq. (39) ( $\lambda = 0.073, d = 4.68$ ); Formation-level 2, Calculated value of simultaneous equation by NEWTON-RAPUSON method, the maximum longitudinal-slope is 10% ( $\lambda = 0.093, d = 4.00$ ); Formation-level 3, Calculated value of approximate Eq. (39) ( $\lambda = 0.093, d = 4.00$ ).

ような近似を行うと、(38)式は(39)式になる。これは極めて単純な近似式であるから、容易に計算できる。

$$\begin{aligned}
 X_m = & X_{m-1} + aY_m / (A_2 + A_1/2) \\
 & + aY_{m+1} / (A_2 + A_1/2)^2 + aY_{m+2} / (A_2 + A_1/2)^3 \\
 & + aY_{m+3} / (A_2 + A_1/2)^4 + aY_{m+4} / (A_2 + A_1/2)^5 \\
 & - b\{A_1 + 2(1 + A_1) / (A_1 + a)\} / (A_2 + A_1/2)
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

計算例を表-2 および図-6, 7 に示す。表-2 には、例題1の地盤高と3種類の計算方法で得た計画高を示す。すなわち、計画高1とは、近似計算で求めた $\lambda_1(0.073)$ および $d(4.68)$ を使い、(39)式で計算した計画高である。計画高2とは、非線形連立方程式をニュートン・ラプソン法により計算した急勾配が10%となる計画高である。計画高3とはニュートン・ラプソン法で得た $\lambda_1(0.093)$ と $d(4.00)$ を用いて、(39)式で計算した計画高である。図-6と7の黒丸は計画高1、点線は計画高2である。なお、近似式は起点と終点から出発し、それぞれ中点まで計算した。 $a$ は例題1が0.67、例題2が0.91になり、大きくはない。例題1では、計画高1と2は地盤高の変化が大きい測点32で30cm離れ、その前後の測点でも差は大きい。測点28と29の間が地盤高の最急勾配で24%であるが、その間の計画高1、2および3の勾配はそれぞれ10.6%、10.2%および10.2%となった。路線全体として、ほぼ計画高1と2は一致しており、(39)式は土工量を最小にして切土量と盛土量がバランスしている計画高の推定に適するであろう。

### VIII. あとがき

図を用いた土工量の推定方法および計画高の簡易計算法について説明した。この方法により得ることがで

きる測点間縦断勾配が制限勾配以下になる縦断線形の土工量は、ニュートン・ラプソン法により計算した測点間最急勾配が制限勾配と一致する縦断線形の土工量よりわずかではあるが過大であった。また、簡易計算法による計画高の計算値とニュートン・ラプソン法の計算値を比較すると、最急勾配はほぼ一致したが、地盤高の変化が大きい地点で約30cmの誤差が生じた。しかし、この方法は作業道の計画路線の土工量および計画高の推定に役立つであろう。この方法は簡単であるから、多数の比較路線から土工量が最も少ない路線を容易に選択することができる。

本報告で論じた路線の土工横断面はすべて山腹勾配と切盛法面勾配が一定で片切片盛としたが、切盛高の小さい作業道でも実際は切り通しと両盛の区間がある場合がある。また、現地における踏査などの場合は、測点間距離は一定ではない。今後、切り通しと両盛の区間を含み、山腹勾配と切盛法面勾配および測点間距離が一定ではない路線の土工量推定法について検討する。

本報告を行うにあたり、ご指導いただいた名古屋大学堀高夫教授に対し、お礼申し上げます。

### 引用文献

- (1) 市原恒一：作業道の縦断勾配設計法および地形図による土工量推定法。日林誌 67：228～235, 1985
- (2) 応用統計ハンドブック編集委員会編：応用統計ハンドブック。41 pp, 養賢堂, 東京, 1978
- (3) Tou, T.J.: Modern control theory, McGraw-Hill, New York, 1964, 中村嘉平訳：現代制御理論。102 pp, コロナ社, 東京, 1966

(1988年8月29日受理)