

N粒繭の不時落緒数による解じょ率の推定

誌名	日本蠶絲學雜誌
ISSN	00372455
著者	寿, 国梁
巻/号	60巻1号
掲載ページ	p. 6-12
発行年月	1991年2月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council
Secretariat



N粒繭の不時落緒数による解じょ率の推定

寿 国梁

東京都文京区東京大学農学部 (〒 113)

(1990年7月30日 受領)

GUOLIANG SHOU: Estimation of reelability percentage I. Estimation based on the number of unexpected dropping ends of N cocoons

In this article, we considered the reelability percentage as a characteristic parameter of a lot of cocoons. We then attempted to develop several methods to estimate the reelability percentage, and discussed the properties of these estimators by a statistical approach. Based on these results, we evaluated the suitability of the sample size of cocoons used in current cocoon testing to identify a more appropriate method for the estimation of the reelability percentage.

In part 1, we assumed that a cocoon was sampled with the same probability from a lot of cocoons, and we built an estimator of the reelability percentage based on the number of unexpected dropping ends of the cocoon sample, as well as analyzed the statistical properties of the estimator.

The results obtained were as follows 1) The estimator of the reelability percentage used in current cocoon testing was consistent, but had a positive bias manifested by a peak where the reelability percentage was about 67%. The bias can be ignored if the sample size of cocoons is greater than 100. 2) The variance of the estimator showed a peak where the reelability percentage was about 75%, and the standard deviation of the estimator was usually less than 3% when the sample size of cocoons was 400. 3) Computer simulation was carried out in order to confirm the results in this article. (*Faculty of Agriculture, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo 113*)

本研究において、著者は解じょ率を繭荷口の固有の特性パラメータと考える。この考えに基づいて、著者は解じょ率のいくつかの推定方法を考案し、数理統計学的なアプローチでそれぞれの推定量の性質を考察する。これを通じて、現在の繭検定に使われているサンプルサイズの妥当性を検討し、よりよい解じょ率の推定方法を探ってみる。

本論文は、繭荷口から繭を等確率で抽出することを仮定し、抽出した繭サンプルの不時落緒数による解じょ率推定量を考案し、その統計的性質を検討した。その結果、次のことが分かった。

1) 現在の繭検定に使われている解じょ率推定量は解じょ率の一致推定量であるが、正のかたよりを有する。解じょ率が約67%の時、かたよりは最大になるが、100粒以上繭を取れば、このかたよりを無視することができる。2) 解じょ率が約75%の時、推定量の標準偏差は最大になるが、400粒繭の不時落緒数を用いた解じょ率の推定量の標準偏差は通常3%以下である。3) コンピュータ・シミュレーション実験で結論の妥当性を確認した。

はじめに

解じょ率の重要性は繭の取引が開始した時からすでに認識され、繭の品質指標の1つとして取り上げられた。その後、製糸技術の進歩と検定費用の削減のため、繭検定のサンプル数と検定方法について多くの改良と簡素化が行なわれた。しかし、解じょ率の推定方法において理論的な研究はあまり行なわれていなかったため、簡素化はほんとうに適当なのかどこまで簡素化ができるのかなどは完全に解決されていない。そこで、本研究は、解じょ率を繭荷口の固有の特性パラメータと考え、解じょ率に関するいくつかの推定量の統計的な性質を考察し、現在の繭検定に使われているサンプルサイズの妥当性を検討し、よりよい解じょ率の推定方法を探ってみる。

本論文は、解じょ率の意味を改めて定義し、繭を等確率で抽出することをもとにした解じょ率の推定方法とその場合の解じょ率推定量の統計的性質を検討し、また、シミュレーション実験で確認したので、その結果を報告する。

なお、本研究を進めるにあたって、適切にご指導をいただいた東京大学教授齋尾乾二郎博士に厚くお礼申し上げます。

解じょ率の定義

蚕糸学用語辞典（日本蚕糸学会，1979）に解じょと解じょ率については、“解じょとは繭層から繭糸が解離される状態のことをいい、その良否を解じょ率をもって表わす”と説明し、その計算法については、“解じょ率は繭糸が繰糸の途中で切断した回数 of 多少を表わすもので、一定粒数の繰糸を行なった際の接緒回数で繰糸粒数を除し100を乗じて求める。1粒あたりの平均落緒回数の逆数に100を乗じたものに等しい”と書かれている。実際に、繭荷口から適当な繭サンプル（サイズNとして）をランダムに抽出し、繰糸実験でN粒繭の落緒回数を測定し、その結果で解じょ率を計算するので、サンプルによって解じょ率の推定値は統計的な変動を見せる。白（1983）は解じょ率を確率変数として、この現象を検討した。しかし、確率変数として解じょ率を定義すると、解じょ率は固有の変動を持ち、サンプルサイズNに依存してしまうことで、繭の母集団の性質

を表すことができなくなる。そこで、本研究は検定する繭荷口を母集団とし、解じょ率をこの繭母集団のある特性パラメータと考え、次のように定義する。

繭荷口の解じょ率 R は $1/(1+\mu)$ とする。ここに、 μ は繭荷口の1粒の繭が1粒繰糸中に生じた不時落緒回数の平均値で、通常、解じょ率をパーセントに換算して使用する。

明らかに、このような解じょ率の定義は、今まで実際に使われている解じょ率の概念と一致し、その推定は繭荷口からのサンプルを通じて繭荷口全体の解じょ特性を推定するという統計的な手法に帰着することができる（ここに、繭荷口（繭母集団）という言葉は荷口に繭が十分あって、無限に多いと考えても差し支えないことを意味している）。

この定義によると、解じょ率 R は繭荷口の1粒の繭が1粒繰糸中に生じた不時落緒回数の平均値 μ の関数で、 μ が正確に分かれれば、解じょ率も分かることになる。また、解じょ率 R は1つのパラメータに過ぎないことで、実験と推定方法がなん種類かあっても不思議ではないことを示唆している。白の定義した解じょ率はまさにここで定義した解じょ率推定量の1つで、ある分布をもって変動していることが容易に説明される。

N粒繭の不時落緒数の分布特性

ある繭荷口からN粒（普通は400粒）の繭をランダムに取り出し、解じょ実験を行なう。このとき、繭 i の不時落緒回数を k_i とおくと、N粒繭の総不時落緒回数 x は

$$x = k_1 + k_2 + \dots + k_N \tag{1}$$

で示される。

ランダムサンプリングのため、 $K_i (i=1, 2, \dots, N)$ は互いに独立で、嶋崎（1973）によると、次の式のようなPolya-Eggenberger分布にしたがうことが知られている。

$$P(k) = \frac{\mu(\mu+\rho) \dots (\mu+(k-1)\rho)}{k!} (1+\rho)^{-\mu/\rho-k} \tag{2}$$

ここに注意すべきことは、繭の抽出は等確率的に行なわれ、各繭に不時落緒数という属性（確率変数）を持っていることである。この考えに基づき、われわれは1粒繭の生じた不時落緒数という属性に(2)

式のような確率分布を与えたのである。以下、省略して、このような考え方をもとにして解じょ率を推定する方法は(不時)落緒数による解じょ率の推定法という。

1粒繭の不時落緒数の積率母関数 $Q(t)$ は(2)式から、

$$Q(t) = (1 + \rho - \rho \exp(t))^{-\mu/\rho} \quad (3)$$

で与えられる。ここに、 μ は1粒の繭の不時落緒回数の平均値で、 ρ は伝播定数で、

$\sigma_k^2/\mu - 1$ で与えられる (σ_k^2 は K の分散を示す)。

したがって、(1)式から N 粒の繭の総不時落緒回数 X は平均値 $N\mu$ 、伝播定数 ρ をもつ Polya-Eggenberger 分布にしたがうこととなる。その積率母関数 $Q_N(t)$ は(3)式から

$$Q_N(t) = (1 + \rho - \rho \exp(t))^{-N\mu/\rho} \quad (4)$$

で与えられる。

N粒繭の不時落緒数による解じょ率の推定

繭検定において、便利のために N 粒繭を一緒にして繰繰している。従って、この場合、個々の繭の不時落緒数の情報が得られずに、 N 粒繭の総不時落緒回数 x だけが測定される(実際に、接緒の回数 $N+x$ が測定されるが、 N を引けば不時落緒数 x が得られる)。そこで、 N 粒繭の不時落緒総数 x を用いて解じょ率の推定を考える。

解じょ率は $1/(1+\mu)$ と定義されているので、その推定は不時落緒数の平均値 μ の推定に置き換えることで行なわれる。

1粒繭の不時落緒数平均値 μ の最も単純な推定量は x/N である。 x/N の平均値が μ で、分散が $(1+\rho)\mu/N$ で与えられるので、 x/N は μ の不偏推定量であり、一致推定量である。また、 x/N は μ の最尤推定量でもある。従って、 N 粒繭の総不時落緒回数による解じょ率の推定量として、 $R_1 = 1/(1+x/N)$ が考案される。これを变形すれば、

$$R_1 = N/(N+x) \quad (5)$$

となる。これは供試繭数 N を接緒数 $N+x$ で割ったもので、現行の繭検定法による解じょ率の計算式である。

N粒繭の不時落緒数による解じょ率推定量の統計的性質

最大推定量の不変性 (MOOD, A. M. etc, 1974) から分かるように、 R_1 は解じょ率 $1/(1+\mu)$ の最尤推定量であり、統計的な性質が解明されやすい。

(5)式に示すように解じょ率推定量 R_1 は x の関数であるため、その確率分布及びモーメントは x の母関数(4)式によって計算される。例えば、解じょ率の平均値は次のように計算される。

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} N/(N+x) P(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} N/(N+x) \exp\{t(N+x)\} P(x) |_{t \rightarrow 0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N \cdot \exp(tN) \sum_{x=0}^{\infty} \exp(tx) P(x) dt \end{aligned}$$

が成り立つので、(4)式の結果を利用すれば、統計量 R_1 の平均値は

$$E(R_1) = \int_{-\infty}^0 N \cdot \exp(tN) Q_N(t) dt \quad (6)$$

で与えられる。

同様な考えで、 R_1 の分散も求められるが、 R_1 の平均値と同様に簡単な数式では表現できない。そこで、次のような近似方法を考える。

まず、(5)式を μ の近傍にテラ展開し、3次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(1+\mu) \{1 + (X/N - \mu)/(1+\mu)\}} \\ &\doteq \frac{1}{1+\mu} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \frac{(X/N - \mu)^i}{(1+\mu)^i} \end{aligned}$$

が近似的に成り立つ。

上の式を書き直せば、

$$R_1 \doteq \frac{1}{1+\mu} \doteq -\frac{X/N - \mu}{(1+\mu)^2} + \frac{(X/N - \mu)^2}{(1+\mu)^3} \quad (7)$$

となる。

(7)式の両辺に期待値を取れば、 R_1 の平均値は

$$E(R_1) \doteq \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{N(1+\mu)^3} \mu(1+\rho)$$

として近似的に求められる。ここに、 $E(X/N) = \mu$ 、 $V(X/N) = \mu(1+\rho)/N$ である。

明らかに、 R_1 は解じょ率の不偏推定量ではない。そのかたよりは

$$\mu(1+\mu)^{-3}(1+\rho)/N \quad (8)$$

いつも正であることから、 R_1 はいつも解じょ率を過大推定していることが分かる。

Fig. 1(a) は推定量 R_1 のかたよりが μ による変化を示している。 μ がゼロの時のかたよりもゼロである

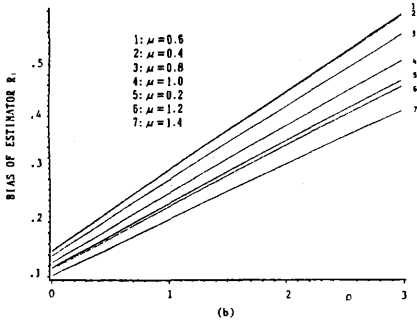
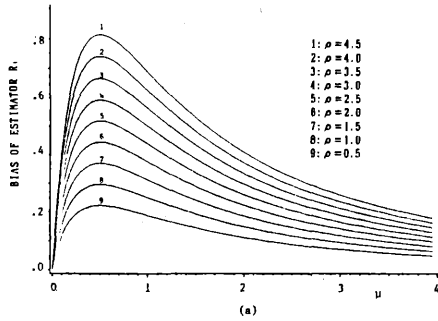


Fig. 1. Bias of reelability estimator R_1 ($N=100$).
 (a) Bias of R_1 to μ .
 (b) Bias of R_1 to ρ .

が、ゼロを離れるとたんに、かたよりは急激に増加して、 μ が $1/2$ の時、最大値 $4(1+\rho)/27N$ を取る。その後、緩やかに減少することが知られた。

Fig. 1(b)は推定量 R_1 のかたよりが ρ により線形的に増加することを示している。

Fig. 2は推定量 R_1 のかたよりが μ と ρ との関係を示している3次元図である。この図から、Fig.

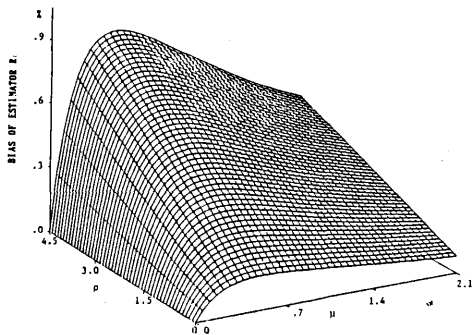


Fig. 2. Three-Dimensional Graph of the Bias of Reelability Estimator R_1 to μ and ρ .
 Legend: Sample size N is 100.

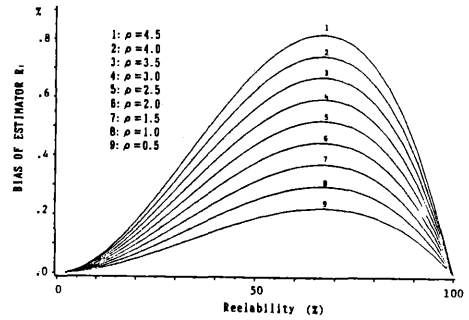


Fig. 3. Relationship of Bias of Reelability Estimator R_1 to Reelability.
 Legend: Sample size N is 100.

1(b) に示している直線が μ の変化につれて上下することはよく説明できる。

Fig. 3は解じょ率推定量 R_1 のかたよりと解じょ率との関係を示している。解じょ率が67%の時、かたよりが最大になることが分かる。

(7) 式の両辺を自乗して、 $(X/N-\mu)^3$ 以上の高次項を無視して、期待値を取ることによって、 R_1 の標準偏差は近似的に

$$\sqrt{\frac{\mu(1+\rho)}{N(1+\mu)^4}} \quad (9)$$

で与えられる。

鹼数 N を十分取れば、 R_1 の標準偏差を十分小さくすることができる。したがって、 R_1 は解じょ率の一致推定量である。

(7) 式にある $(x/N-\mu)$ を3次項まで取って、両辺に自乗して期待値を取ることによって、(9)式に示す R_1 の標準偏差の近似値は真の標準偏差よりやや大きいことが分かる。しかし、この差は N が大きいとき非常に小さいので無視できる。

Fig. 4(a)は推定量 R_1 の標準偏差が μ による変化を示している。図からも分かるように、 μ が $1/3$ を取るとき、 R_1 の標準偏差は最大値

$$\sqrt{(1+\rho) \times 27 / (256 \times N)}$$

を取るようになる (N と ρ が一定の時、 μ による標準偏差の最大値は、(9)式に示す標準偏差が μ に対する微分をゼロにおくことによって得られる)。Fig. 4(b)は推定量 R_1 の標準偏差が ρ によって線形的に増加していることを示している。

総合的に推定量 R_1 の標準偏差と μ 及び ρ との

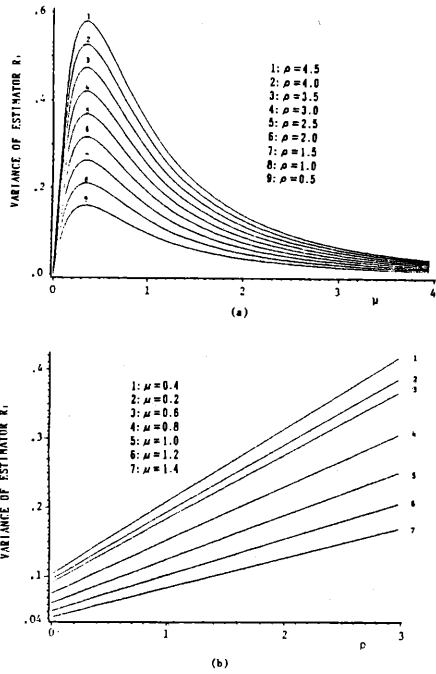


Fig. 4. Variance of Releability Estimator R_1 ($N=100$).

- (a) Variance of R_1 to μ
- (b) Variance of R_1 to ρ

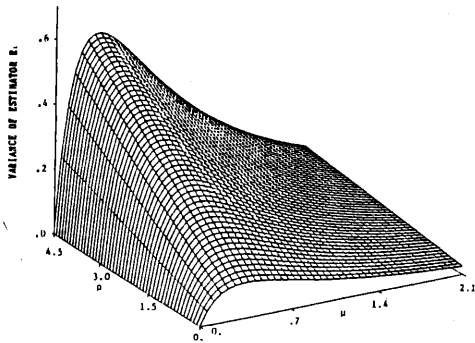


Fig. 5. Three-Dimensional Graph of the Variance of Releability Estimator R_1 to μ and ρ ($N=100$).

関係を示す3次元図は Fig. 5 である。 μ が $1/3$ から離れると、解じょ率の標準偏差は小さくなるが、 μ が $1/3$ の近くで ρ が大きくなると、かなり大きくなること分かる。

Fig. 6 は解じょ率推定量 R_1 の標準偏差と解じょ

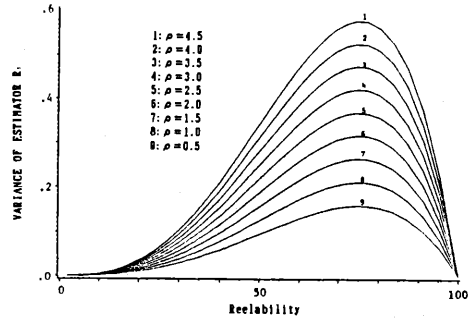


Fig. 6. Relationship of Variance of the Releability Estimator R_1 to Releability ($N=100$).

率との関係を示している。解じょ率が75%の時、標準偏差が最大になる。

Nが大きい場合の漸近的特性

N 粒の繭の総不時落緒数 x の確率分布は (4) 式によって決定されているので、 x/N の分布も計算できる。サンプルサイズ N が比較的大きい場合には、 x は N 粒繭の不時落緒数の和で、中心極限定理によると、 x/N は漸近的に平均値 μ 、分散 $\mu(1+\rho)/N$ の正規分布にしたがう。したがって、 μ の95%パーセント信頼区間は近似的に

$$\mu \pm 1.96 \sqrt{\mu(1+\rho)/N} \tag{10}$$

で与えられる。

解じょ率推定量 R_1 の確率分布は (5) 式の関係で (4) 式から計算することができる。 R_1 が最尤推定量なので、 N が大きくなると漸近的に解じょ率 $1/(1+\mu)$ を平均値、(9) 式を標準偏差とする正規分布にしたがうことが分かる。したがって、解じょ率の95%パーセント信頼区間は近似的に

$$R \pm 1.96R^2 \sqrt{\mu(1+\rho)/N} \tag{11}$$

与えられる。

実データに基づくシミュレーション実験とその結果

今までの結論の多くはテラ展開などの近似を行なって得たものである。そこで、坪井 (1983) の9つの解じょ実験のデータ (荷口A~I) を使ってそれらの妥当性を検証してみる。

シミュレーション実験は Fig. 7(a) に示すような1粒繭の不時落緒数の頻度分布をもとに行なわ

Table 1 Estimation of μ by the number of unexpected dropping ends

cocoon lot	population parameters			estimation of μ by X/N			
	μ	ρ	number of cocoons	$\hat{\mu}$	S. D. of $\hat{\mu}$	asymptotic 95% confidence interval lower	upper
A	.7644	.8372	972	.7655	.012	0.74	0.79
B	.4449	.4290	998	.4462	.008	0.43	0.46
C	.6121	.8720	1026	.6125	.011	0.59	0.63
D	.6854	.7836	1033	.6867	.011	0.67	0.71
E	.9834	1.0425	1022	.9832	.014	0.96	1.01
F	.7360	.8567	1034	.7370	.012	0.71	0.76
G	.6277	.8239	1104	.6263	.011	0.61	0.65
H	.5749	.5013	1028	.5750	.009	0.56	0.59
I	.1503	.5464	1031	.1503	.005	0.14	0.16

Legend : N, the sample size of cocoon, is 100 and 10000 replications.

Table 2 Estimation of reelability R by the number of unexpected dropping ends.

cocoon lot	reelability R (%)		bias of R_1		S. D. of R_1		asymptotic 95% confidence interval of reelability R_1	
	population parameter	by simulation	by eq. (8)	by simulation	by eq. (9)	by simulation	lower	upper
A	56.68	56.89	.259	.218	3.84	3.80	49.45	64.34
B	69.21	69.35	.212	.145	3.84	3.81	61.88	76.83
C	62.03	62.28	.277	.252	4.15	4.09	54.26	70.30
D	59.33	59.54	.258	.205	3.92	3.89	51.92	67.16
E	50.42	50.68	.261	.261	3.64	3.62	43.59	57.77
F	57.60	57.84	.264	.231	3.91	3.91	50.17	65.50
G	61.44	61.75	.270	.316	4.08	4.02	53.87	69.63
H	63.50	63.71	.223	.217	3.77	3.77	56.33	71.10
I	86.93	87.09	.154	.158	3.66	3.66	79.91	94.26

Legend : N, the sample size of cocoon, is 100 and 10000 replications.

れた。まず、乱数を発生し頻度分布から1粒の不時落緒数を求め、そして、N粒の繭の不時落緒数の和で解じょ率を計算する。1万回の反復で各統計量を推定する。Table 1 に示すように坪井の実験に使われた繭の数は各荷口とも約1000粒なので、その荷口の落緒性質と近似することができる。したがって、このシミュレーション実験は実際の実験とほぼ同等である。

Table 1 は繭のサンプルサイズが100の場合での μ に関する推定で、予想通りに荷口のパラメータと一致した推定値が得られた。Table 2 は R に関する推定を示している。 R_1 のかたよりはいつも正で、

その推定値と(8)式による計算値とはかなり一致した傾向がみられた。また、標準偏差の推定値と(9)式による計算値とは等しいが計算値のほうがやや大きいことが分かった。

Fig. 7 (b) は100粒繭の不時落緒数の分布を示したもので、正規分布の形をしていることが明らかになった。Fig. 7(c)は100粒繭による解じょ率の推定値 R_1 の分布を示している。同様に、それも近似的に正規分布にしたがうことが分かった。したがって、(10)式と(11)式を使って μ とRの漸近的信頼区間を計算することができる(Table 1とTable 2の右の2列)。

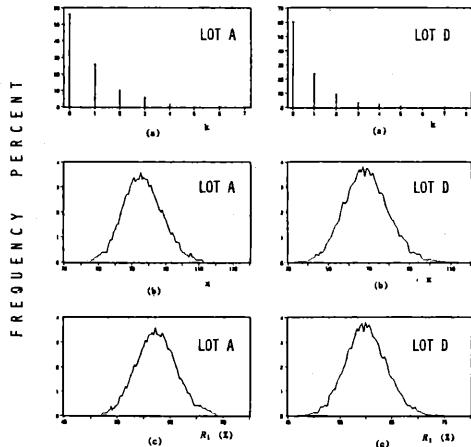


Fig. 7. Distribution of the number of dropping ends and the estimator R_1

Density function of the number of dropping ends of 100 cocoons (b) and the estimator of reelability R_1 (c) are the results of simulation which is based on the observed density function of the number of cocoon dropping ends (a), and sample size N is 100, 10000 replications.

Fig. 8 はサンプルサイズ N の変化による解じょ率推定値 R_1 の変化を示したものである。 N が 100 ぐらいになると、かたよりはほぼゼロに近いが、標準偏差の場合では N が 200 以上となるとほぼ一定の値にとどまってしまう。

実際の繭荷口を考えると、通常、春繭の解じょ率は約75%で、夏秋繭の解じょ率は約60%である。この場合では、推定量 R_1 のかたよりはちょうど最大値の近くにあり、標準偏差もその最大値の近くにある。しかし、1粒繭の不時落緒数の伝播定数 ρ がそれほど大きくないこと (ρ は 2 となると、かなり大きい方である) から、 N が 100 粒を取っても、解じょ率推定量 R_1 のかたよりの最大値は $(1+\rho)/675$ で、無視することができる。標準偏差のほうはやや問題がある。例えば、1粒繭の不時落緒数の伝播定数 ρ が 0.5 である場合、繭数 N が 400 粒を取れば、解じょ率推定量 R_1 の標準偏差の最大値は約 2 以下%で、実用上ではまだ容認できるが、 ρ を 1 と、 N を 100 とした場合では、標準偏差の最大値が 4.6 %になる。したがって、繭検定を簡素化するために、

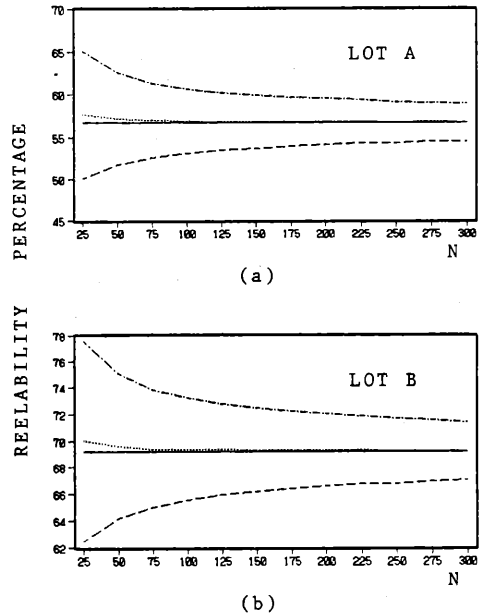


Fig. 8. Asymptotic properties of the estimator R_1
 — : True values of the reelability percentage.
 : Experimental values of the estimator R_1 .
 - - - : Upper and lower limits of asymptotic one o confidence interval.
 Simulation condition : 10000 replications.

繭サンプルサイズを減らすと、推定した解じょ率の信頼性が失ってしまうこともある。

文 献

白 倫 (1983) : 四百粒解繭率の分布及其特徴数, 蘇州絲綢工学院学報, 第 4 期, pp. 1-14.
 MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A. and BOES, D. C. (1974) : INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS, (3rd Ed.), pp. 284-285, McGRAW-HILL, Inc., Auckland.
 日本蚕糸学会 (1979) : 蚕糸学用語辞典, pp. 18, 信陽堂, 東京.
 嶋崎昭典 (1973) : 管理工学入門, 283 pp., 農林統計協会, 東京.
 坪井 恒 (1983) : 異質原料繭の合併理論に関する研究 (昭和57年度科研費補助金研究成果報告書, 研究代表者・嶋崎昭典), pp. 3-13, 信州大学繊維学部, 上田市.