林分成長モデルによる収穫予定の最適化に関する基礎的研究

誌名	鳥取大学農学部研究報告 = Bulletin of the Faculty of Agriculture, Tottori University
ISSN	03720349
著者	黒川, 泰亨
巻/号	55巻
掲載ページ	p. 5-12
発行年月	2002年11月

農林水産省 農林水産技術会議事務局筑波産学連携支援センター
Tsukuba Business-Academia Cooperation Support Center, Agriculture, Forestry and Fisheries Research Council Secretariat

鳥大農研報（Bull. Fac. Agric., Tottori Univ.）55　5～12（2002）

林分成長モデルによる収穫予定の最適化に関する基礎的研究

黒川泰亨

平成14年7月1日受付

鳥取大学農学部森林科学講座

A Basic Study on the Optimization of the Harvesting of Trees with the Forest Growth and Yield Model

Yasuaki Kurokawa

Department of Forest Science, Faculty of Agriculture, Tottori University, Tottori 680-8553, Japan

Growth and yield models are relationships between the amount of yield or growth and the various factors that explain or predict the growth. Growth and yield models sort themselves out by whether they model; (1)whole stands as portrayed by stand variables such as age or basal area per hectare, (2)the average tree within each diameter class, or (3)each individual trees in a sample or stand. Yields per hectare are provided directly by the whole stand model. So model(3) is convenient to make optimum harvesting plan using the method of the liner programming. Uneven-aged management leads to a forest with a more natural aspect than its even-aged. This forest is attractive for multiple use of forests. In this paper, it was investigated a growth model of uneven-aged stand consisting of a set of recursive equations at the first stage. This model can be used to predict the evolution of an uneven-aged stand under various management regimes. Then this model is used to predict the harvest and growing stock that kept a stand in a steady state. At the next stage, a linear programming is used to determine the cutting rules that maximize the total volume produced per unit of time for a given cutting cycle. The results of the paper are more useful for the long-term prediction of the uneven-aged forest and a selection forest.

(Received 1 July 2002)

Key words: growth and yield model, uneven-aged forest, recursive equation, linear programming, steady-state

緒　言

施業林分であれ非施業林分であれ，森林資源の将来の姿を予測しその森林から最適な収穫を得ることに関する計画の策定は，森林管理の最も重要な問題の1つである。とくに森林は育成期間が超長期に及びリスクが大きいこと，成熟時期や収穫時期が農業生産に見るほど明瞭に定まらず融通性があることなど，森林の持つ諸特性から長期的視点に立って森林の将来の姿を的確に予測し，その森林から最適な収穫を持続的に得ることに関する計画の策定が極めて重要となる。

一般に，林木の成長に関する幾つかの経験的知識にもとづいて林分密度の変化や生育期間の経過に伴って林木の成長現象を記述するシステムを成長モデルという。現在までに多くの成長モデルが提案されているが，本稿では，いわゆる林分全体を対象とした林分成長モデルをもとにして異齢林に関する収穫予定の最適計画策定に関して若干の考察を加える。手法的には林分成長モデルと線

形計画法による最適化問題との融合であり，異齢林に関する最適収穫の決定問題を取り上げる。

林分成長モデルに関する予備的検討

林分成長モデルは，1)林齢や胸高直径といった林分に関する変数によって記述した林分全体を対象としたモデル(林分モデル)，2)各直径階における平均的樹木を対象としたもの(直径モデル)，さらに3)標本内もしくは林分内の単木を対象としたもの(単木モデル)の3つに大きく区分できると考えられる[4]。成長モデルは樹木の成長に関する経験的法則にもとづいて構成されるものであるが，最近は複雑な数理モデルを構築し，シミュレーション的方法を多用した極めて洗練されたものになってきているが，統計や数学的興味は深いものの最適収穫計画の策定や最適輪伐期の決定という経営経済的観点からは実践性が乏しくなってきているともいえよう。

本稿では，異齢林を対象としたJ.ボンジョルノによる林分成長モデルを使用して[1]，成長モデルと線形計画法による収穫計画の最適化の統合に関して幾つかの基礎的な考察を加える。異齢林ないし択伐林では，小面積の林地に異なる樹齢，異なる大きさの多数の林木が共存しているが，総ての樹齢の林木が1つの林分内に同時に出現するような理想的な異齢林はまれであるため，同齢林における林班のような固定的な森林区画にもとづいて森林を管理することは難しい。

同齢林においては大面積が皆伐されることがあり，従来の日本におけるスギ・ヒノキ同齢林の一斉皆伐に見るような弊害が指摘されてきている。異齢林においては大面積の林分が皆伐されることは滅多になく，林分内において単木あるいは一群の林木が択伐されるのが通常である。その結果，異齢林はいわゆる間断経営とはならず，始まりも終わりも持たないことになる。伐採直後でさえ異齢林の各箇所には常に林木が存在する。択伐林での更新は天然更新が通常である。それは大径木を伐採した結果できる隙間に存在していた下層幼樹の一部が成長して成立することによる。したがってこのような経営形態はカエデ，ヘムロック，スプルース，シーダーなど耐陰性の樹木に良く適合しているといわれている。

異齢林の経営は，同齢林よりも自然的な側面を多く持った森林を造成することになる。異齢林経営は水源涵養や景観維持など多目的利用のために経営される森林にとって魅力あるものであり，小規模の民有林ではしばしば見られる伐採形態である。択伐林の場合は，林分内に林木が常時存在するのでより繊細な施業が必要となるため，熟練技術者によってのみ可能な労働集約的な施業となる。異齢林の経営は，間断経営と比較して経営期間の始めと終わりが明瞭でないため，経営経済的な分析はほとんど進んでいないのが実情である。

異齢林の経営は，伐採費用が最終生産物の価値のほんの一部でしかないような，高価で高品質の木材生産に良く適している。異齢のシステムは同齢のシステムよりも複雑であるため，択伐システムに関する研究は少なく，これらの森林の木材生産のための真の経済学的な研究は今後の課題となっているといえよう。

本稿は，J.ボンジョルノによって提示されたモデルに全面的に依拠しながら，異齢林の経営に関する経営経済的な問題を展開するが，これらの問題では，ある与えられた択伐林に関してある伐採から次の伐採までの間隔と伐採強度すなわち取り除かれる林木の本数と大きさに関する分析が主たる課題となる。

異齢林分に関する成長モデル

異齢林分は，次に示すn次元の列ベクトル$\mathbf{y}_t$で表される。そのベクトルの各要素が時刻tでの特定の直径階iにおけるha当たりの平均立木本数となる(ただしnは直径階の総数とする)。

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{it} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}$$

時刻tでの伐採本数は次に示すn次元の列ベクトル$\mathbf{h}_t$で表される。そのベクトルの各要素が時刻tでの特定の直径階iにおける単位面積当たりの伐採本数となる。

$$\mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_{1t} \\ \vdots \\ h_{it} \\ \vdots \\ h_{nt} \end{bmatrix}$$

以上より，森林の成長は次の(1)式のような漸化式によって記述される。ただし$\mathbf{G}$はn行n列の係数を持つ行列であり，$\mathbf{c}$は定数項のベクトルである。

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{G}\,(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t) + \mathbf{c} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots\cdots & d_n \\ b_2 & a_2 & & \\ & b_3 & a_3 & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & b_n & a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} \doteq \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

これらの$\mathbf{G}$と$\mathbf{c}$の係数は，次に示す2組のデータから導き出せる。すなわち，1)任意の1期間においてある直

径階から別の直径階に成長して移動する立木本数の割合，2)ha当たりの立木本数に関して正の関係があり断面積合計に対して負の関係がある進界成長に関連する方程式である。そして初期の森林y_0の成長は，方程式(1)を反復して適用すれば必要な限り幾らでも記述できる。

$$y_1 = G\ (y_0 - h_0) + c$$
$$y_2 = G\ (y_1 - h_1) + c$$
$$\vdots$$
$$y_n = G\ (y_{n-1} - h_{n-1}) + c$$

森林が定常状態になるためには，伐採量hと蓄積量yは次の条件を満足する場合である。すなわち，総ての時刻tに対して次の関係が成立する場合である。

$$y_{t+1} = y_t = y \quad \text{かつ} \quad h_t = h$$

これを(1)式の基礎成長方程式に代入すれば，保続収穫による伐採量と蓄積量は次の方程式を満足しなければならない。

$$y = G\ (y - h) + c$$

同時に伐採量は蓄積量を上回ることができないから次の条件を満足しなければならない。

$$y \geqq h$$

伐採本数を立木本数のu%以下に抑えるという場合には次の条件を付ける必要がある。

$$uy \geqq h$$

さらに，伐採本数を立木本数u%以上r%以下にするという場合には次の2つの条件を付けることになる。

$$uy \leqq h, \quad ry \geqq h$$

もし森林を全く伐採しない場合は次のようになる。

$$h = 0$$

各直径階別の伐採本数と立木本数に関する制約条件には各種のものが考えられるが，これらは森林の管理目的によることになる。

異齢林分の成長モデルの具体例

本稿ではJ.ボンジョルノの例をそのまま使用するが，第1表は五大湖地方で経営されているサトウカエデの林分の直径分布を示している。表記を簡単にするためここでは3つの直径階のみが用いられている。実際問題としては6つや7つの直径階が必要であり，直径階を7つにした研究事例も報告されているが[2]，原理的には全く同じである。なお第1表はもともとinch，bft/acreを単位としていたが，これを換算してcmと㎡/haを単位として表示してある。

第1表 サトウカエデの異齢林の構造

直径階	直径の範囲 (cm)	本数 (本/ha)	平均直径 (cm)	胸高断面積 (㎡)	断面積合計 (㎡/ha)
1	10-19	1,038	15.2	0.019	19.3
2	20-35	289	27.9	0.061	17.7
3	36+	17	40.6	0.130	2.3
計		1,344			39.3

注)[2] による。

この成長モデルでは，どの時刻の林分の状態も3つの変数：$y_{1,t}$，$y_{2,t}$，$y_{3,t}$で表される（$y_{i,t}$は時刻tでの直径階iにおけるha当たりの生育木の本数）。このときの成長モデルは，現在の状態が与えられた場合の，時刻$t+1$における林分の状態を与える連立方程式である。このモデルは3つの方程式から構成される。ただし第1式の変数O_tは進界成長を意味し，tから$t+1$に時刻が進む間に最初の直径階に参入する幼樹の本数である。

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = G^* \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

第1表の林分に適用されるパラメータの具体的な値は次の行列Pの係数のようになっている[2]。

$$P = \begin{bmatrix} 0.80 & & \\ 0.04 & 0.90 & \\ & 0.02 & 0.90 \end{bmatrix}$$

各パラメータ$a_{i,i}$は時刻tにおける直径階iの生育木が，時刻$t+1$になお生存していて同一の直径階にそのまま残留している立木の割合である。各パラメータ$a_{i,i+1}$は，時刻tにおける直径階iの生育木が，時刻$t+1$においてなお生存していて，1つ上方の直径階$i+1$に移行する立木の割合である。

なおこの成長モデルでは1分期を5年間とし極めて短く設定しており，この分期内に林木が1つ上の直径階を飛び越えて成長できないことを前提としている。ここで$a_{11}=0.80$，$a_{21}=0.04$の具体的意味は，1分期(5年)後に平均して直径階1の林木の80%が直径階1にそのまま存在し，4%が成長して上位の直径階2に移行し，16%が枯死して直径階1から1分期後に完全に消滅することを表している。

進界成長O_tの具体的な計測と数量化は森林生態学の分野において結構難しい課題だといわれているが，他の条件が等しいなら進界成長は断面積合計の増加とともに減少し，単位面積当たりの立木本数の増加とともに増加する傾向にあるとされている[5]。J.ボンジョルノはサトウカエデ林に対しては平均して次のような関係が認め

られるとしている[2]。進界成長は5年単位(分期)で測定される。B_tは断面積合計，N_tは立木本数であり，総ての数値はha当たりに換算してある。

$$O_t = 101 - 24.46B_t + 0.76N_t$$

(本/ha/5年)　　(m²/ha)　　(本/ha)

この進界成長式は，次の関係があるから$y_{1,t}$，$y_{2,t}$，$y_{3,t}$のみを含む式に書き換えられる。ただし各係数は対応する各直径階における平均木の胸高断面積である。

$$N_t = y_{1,t} + y_{2,t} + y_{3,t}$$

$$B_t = 0.019y_{1,t} + 0.061y_{2,t} + 0.13y_{3,t}$$

したがって，成長モデルの最終的な式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = G * \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.29 & -0.96 \\ 0.04 & 0.90 & \\ & 0.02 & 0.90 \end{bmatrix}$$

この基礎的な成長モデルは，時刻 t と t ＋1での林分の状態を記述する変数のみを含む。次節ではまず撹乱のない場合の林分の成長を記述するために(2)式の関係を用いる。その後さまざまな経営目的に対する伐採計画の最適決定のためにこのモデルの変形を検討する。

非施業林分での林分成長の予測

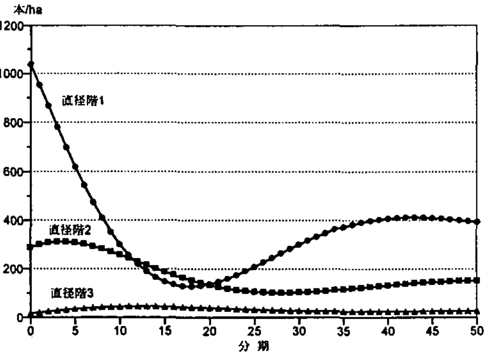
[$y_{1,0}$，$y_{2,0}$，$y_{3,0}$]は，時刻 t ＝0 における異齢林分の初期状態を示しているが，まず当該林分から立木が全く伐採されない場合の将来の状態を予測する。これを行うには基礎的な成長関係式(2)式を反復して適用することで可能となる。本稿では，撹乱の起こらない場合のサトウカエデ林分の成長を予測するに際して，林分の初期状態として第1表の数値をそのまま使用する。具体的な数値は次のとおりである。

$y_{1,0} = 1,038$ 本/ha

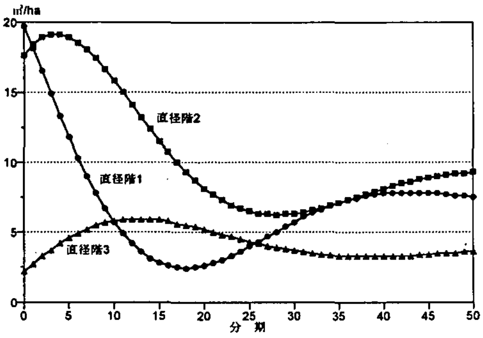
$y_{2,0} =$ 289 本/ha

$y_{3,0} =$ 17 本/ha

成長方程式にこれらの初期状態を代入すれば，1分期後のha当たりの立木本数が得られる。この1分期後の値を成長方程式に代入すれば2分期後の林分の状態が得られる。この方法を反復適用すれば望む限りの期間の予測が可能となる。第1図と第2図は，初期状態として第1表の値をそのまま使用した場合(これを事例1とする)において，ha当たり立木本数と断面積合計の予測を示している。その林分は最近強度の伐採が行われたためか初期において直径階1に多くの林木が存在しているような形になっている。



第1図　直径階別立木本数の推移(事例1)



第2図　直径階別胸高断面積合計の推移(事例1)

もしこの森林が50分期間全く撹乱されない(進界成長による直径階1の林木の増加，成長による1つ上位の直径階への立木の移動，各直径階における枯死による林木の消滅のみと仮定する)とすれば，直径階1の立木本数は17分期頃までは急速に減少するが，その後徐々に立木本数は増加傾向を示して最終的に安定する。直径階2の立木本数は25分期頃まで緩やかに減少しながら，その後はほぼ一定のまま推移する。直径階3の立木本数はもともと本数が少ないが，ほとんど変化なしに安定的に推移していくことが分かる。

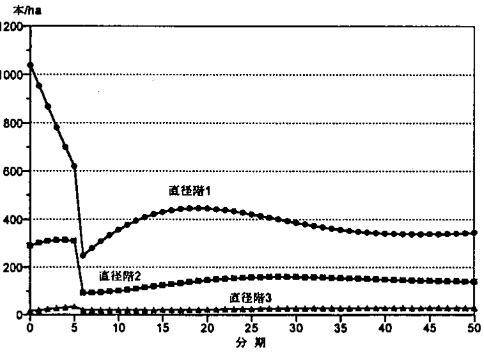
第2図に示した断面積合計の変化は，第1図に示した立木本数の変動とともに複雑な変動を示すが，立地の占有に関して，直径階3の重要性が次第に高まることを示している。直径階2と直径階3が優勢であることこそが，進界成長の連続的な減少と，それによる直径階1での立木本数の減少を導き，森林が定常状態に向かって安定化していくことになると考えられる。

次に，与件変化によってシステムの安定性を検討してみる。第3図と第4図は，第1図における5分期目において何らかの外的要因によって立木本数が急減した状態(直径階1において60%の本数減少，直径階2において70%の

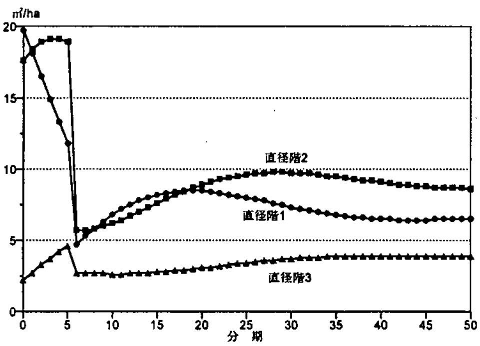
本数減少，直径階3において40%の本数減少があったと仮定し，これを事例2とする)に陥ったと想定して，その後の森林の回復状態を見たものである。

第1図および第2図と比較して，途中で攪乱があったため変動の態様は異なるのは当然であるが，最終的には同じ立木本数と断面積合計へ収束し安定化することが分かる。森林の持つ自然回復力によってある種の極相の状況を作り出すようになる。

なお，与件変化によるシミュレーションを行う際に立木本数を極端に減少させたとき，分期の推移過程においてある特定の直径階の立木本数が一時的にゼロになることもあるが，その直径階の本数をゼロとして計算を続行すれば数分期後に正の値に回復して最終的には安定することになる。この意味においては当該成長モデルは安定的であるといえる。



第3図　直径階別立木本数の推移(例2)



第4図　直径階別胸高断面積合計の推移(例2)

非施業林分における定常状態

先に示した第1図～第4図は50分期間のみのデータを示しているが，さらに長い期間の計算を追跡すると，立木本数と断面積合計の値は非常に長い期間にわたって振動を繰り返すが，その振幅は次第に減衰して，最終的には林分が永遠に変化しないような定常状態に収束していくことになる。定常状態の森林を決定するには，長期にわたる反復計算によって収束の状況を見るという方法でも可能であるが，それより直接的な方法が考えられる。

定義によると，定常状態とは測定された時刻にかかわらず，その林分が常に各直径階において同じ立木本数を持つことを意味する。つまり次の関係が成立するときである。

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

（$i=1,2,3$ および総ての t に対して）

成長モデルにおいて，$y_{i,t+1}$ と $y_{i,t}$ に未知の定常状態の値 y_i を代入すると，(3)式に示す3元1次連立方程式となり容易に解を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = G * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.29 & -0.96 \\ 0.04 & 0.90 & \\ & 0.02 & 0.90 \end{bmatrix}$$

(3)式の連立方程式を解くと $y_2=5y_3$, $y_1=2.5y_2$, $y_1=12.5y_3$ となる。これは定常状態になった森林においては最小の直径階1，中間の直径階2，最大の直径階3に各々存在する立木本数が1：5：12.5の構成割合になることを示している。

上式(3)の3元1次連立方程式を解いて求めた最終的な立木本数は次のようになる。

$y_1 =$ 359.2 本/ha
$y_2 =$ 143.7 本/ha
$y_3 =$ 28.7 本/ha

第1図と第3図を見ると，分期の推移とともに各直径階に属す立木の本数が，長い周期で変動を繰り返しながら，限りなくこの本数に近づいていく様子が容易に確認できる。定常状態の分布は，異齢林分において典型的な逆J型となるが，第1表に示してある当初の森林と比較して直径階1と直径階2においては立木本数が少なく，直径階3においては立木本数が多くなっている。初期状態として取りあげた林分は実際に経営されており，直径階3に属する大きな林木が伐採行為によって定期的に林分から取り除かれているので，これは当然の結果であるともいえよう。

施業林分に関する成長モデル

定期的に伐採されている林分の成長予測のためのモデ

ルについて検討する。これは次に示す2つのステップで行うことができる。まず第1に経営されている異齢林分の成長を決定する関係式を確立すること，第2にそのような林分に対する定常状態を定義する方程式を決定することである。

成長方程式については，次のように考えることができる。ある時刻 t における伐採は各直径階において伐採される立木本数によって表される。これを $h_{1,t}$，$h_{2,t}$，$h_{3,t}$ とする（ただし，$h_{i,t}$ は時刻 t において直径階 i から伐採された立木本数）。したがって各直径階 i において伐採後に残る立木本数は $y_{i,t}-h_{i,t}$ である。これらの残存木は先に示した(1)式の成長方程式にしたがって成長する。その結果，1分期ごとに伐採される異齢林分の成長は伐採後の本数にもとづいて(4)式の漸化式によって表現できる。

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = G^* \begin{bmatrix} y_{1,t}-h_{1,t} \\ y_{2,t}-h_{2,t} \\ y_{3,t}-h_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots (4)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.29 & -0.96 \\ 0.04 & 0.90 & \\ & 0.02 & 0.90 \end{bmatrix}$$

この漸化式の系は，

$$h_{i,t} \leqq y_{i,t}$$

である限り，伐採の時期とレベルにかかわらず，あらゆる過程での伐採によって変化する林分の状況を完全に表現している。本稿では定常状態に森林を維持する過程において，古典的な保続収穫経営で規則的な間隔で行われる伐採について検討してみる。

施業林分における定常状態

経営が行われている異齢林分は，もしその林分から伐採される量が前回に伐採されて以降の成長量と全く等しければ定常状態にあるといえる。これは総ての直径階においてこの関係が成立している必要がある。y_i を伐採直前の直径階 i における立木本数，h_i は定常状態における直径階 i における伐採本数と考えると，そのとき総ての時刻 t に対して以下の関係が成立するときに定常状態となる。

$$\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{1,t+1} \\ h_{2,t+1} \\ h_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,t} \\ h_{2,t} \\ h_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$(i=1,2,3)$$

この関係を成長モデル(1)式に代入することにより，次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = G^* \begin{bmatrix} y_1-h_1 \\ y_2-h_2 \\ y_3-h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots (5)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.29 & -0.96 \\ 0.04 & 0.90 & \\ & 0.02 & 0.90 \end{bmatrix}$$

これは6つの未知数を含む3つの方程式からなる連立方程式である。この連立方程式において意味ある解は，各直径階から伐採可能な本数はそこにある立木本数を超えることができないから，次の条件が成り立つときである。

$$h_i \leqq y_i \quad (i=1,2,3) \cdots\cdots (6)$$

方程式(5)と不等式(6)の条件を同時に満たす解は複数ある。定常状態を維持する蓄積[y_1，y_2，y_3]と伐採量[h_1，h_2，h_3]の組み合わせが複数あることになるが，ここで，線形計画法を使用して特定の目的に沿った最適解を求めることを考える。

線形計画法による施業林分の最適収穫

保続収穫経営の古典的な目標は，森林を定常状態に維持する一方で，単位期間当たりに生産される材積を最大化することである。それは本稿の場合，具体的には，林分が1分期（5年）ごとに5年前の状態に完全に復帰し，そして5年ごとに伐採される材積が常に一定量に維持され，かつ収穫材積が最大になることを意味する。

第2表　直径階別の平均木の材積

直径階	直径の範囲 (cm)	平均直径 (cm)	材　積 (m³)
1	10-19	15.2	0.047
2	20-35	27.9	0.236
3	36+	40.6	0.708

注）[2] による。

第2表は各直径階における平均木の材積をm^3単位で示している。5年ごとに当該森林の各直径階から伐採される立木の総材積は次式で示される。

$$Z_Q = 0.047h_1 + 0.236h_2 + 0.708h_3$$

目的は，方程式(5)と不等式(6)を満足しながら，この関数を最大にする伐採量 h_1，h_2，h_3 を見いだすことである。

通常一般の線形計画法のフォーマットでこの変数を再配列すれば第3表の線形計画タブローが得られる（これを計画1とする）。最適解はタブローの最下段に示したとおりである。

第3表 線形計画のタブロー(計画1)

	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	h_3	rhs
Z_Q				0.047	0.236	0.708	→ max
1)	0.08	0.29	0.96	0.92	−0.29	−0.96	=98
2)	−0.04	0.10		0.04	0.90		= 0
3)		−0.02	0.10		0.02	0.96	= 0
4)	−1			1			≦ 0
5)		−1			1		≦ 0
6)			−1			1	≦ 0
最適解							
	1225.0	49.0	0	0	49.0	0	

線形計画による最適解の具体的な内容は第4表に示すようになる。

第4表 最適解(計画1)

直径階	直径の範囲 (cm)	立木本数 (本/ha)	伐採本数 (本/ha)
1	10-19	y_1 =1,225	h_1 = 0
2	20-35	y_2 = 49	h_2 = 49
3	36+	y_3 = 0	h_3 = 0

1分期(5年)当たり収穫量：

$$Z_Q = 11.564\ \mathrm{m^3/ha}$$

したがって，計画1の場合の最適な林分構造は，伐採直前の時点で最小の直径階1が1,225本/ha，中間の直径階2が49本/ha，最大の直径階3は0本/haという立木本数の構成となる場合である。また最適の伐採法は，5年ごとに中間の直径階2から総ての立木を伐採することである。これにより11.564m³/ha/5年(年平均2.313m³/ha)の最大一定収穫量が確保できる。先に示した成長モデルにこの結果を入れると，林分は5年間で伐採直前の元の構造に完全に回復して定常状態にもどる。

この計画1の最適解では，中間の直径階2から総ての立木を伐採するという伐採法を採用することになる。これは非現実的だと思われるので，伐採本数に関して，直径階1においては立木本数の50%以下，直径階2では立木本数の40%以下，直径階3では立木本数の30%以下という制約条件を付けた場合について最適解を求めた。線形計画法のフォーマットにしたがって変数を再配列すれば第5表に示す線形計画タブロー(これを計画2とする)が得られる。

第5表 線形計画のタブロー(計画2)

	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	h_3	rhs
Z_Q				0.047	0.236	0.708	→ max
1)	0.08	0.29	0.96	0.92	−0.29	−0.96	=98
2)	−0.04	0.10		0.04	0.90		= 0
3)		−0.02	0 10		0.02	0.96	= 0
4)	−0.40			1			≦ 0
5)		−0.30			1		≦ 0
6)			−0.20			1	≦ 0
最適解							
	923.7	99.8	5.0	0	30.0	1.0	

最適解はタブローの最下段に示したとおりであるが，最適解の具体的な内容は第6表のようになる(小数点以下の四捨五入により若干の誤差がある)。

第6表 最適解(計画2)

直径階	直径の範囲 (cm)	立木本数 (本/ha)	伐採本数 (本/ha)
1	10-19	y_1 = 924	h_1 = 0
2	20-35	y_2 = 100	h_2 = 30
3	36+	y_3 = 5	h_3 = 1

1分期(5年)当たり収穫量：

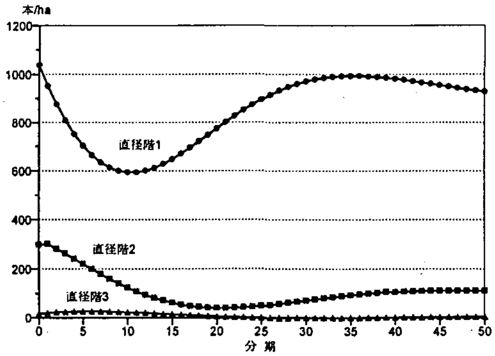
$$Z_Q = 7.788\ \mathrm{m^3/ha}$$

計画2の場合，最適な林分構造としては，伐採直前の時点で最小の直径階1が924本/ha，中間の直径階2が100本/ha，最大の直径階3は5本/haという立木本数の構成となる。また最適の伐採法は，5年ごとに中間の直径階2から30本の立木を伐採し，最大の直径階3から1本を伐採することである。これにより7.788m³/ha/5年(年平均1.558m³/ha)の最大一定収穫量が確保できる。

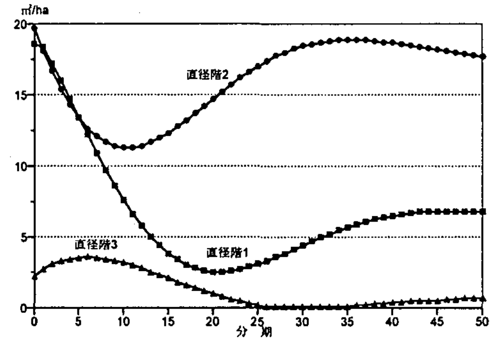
伐採に関する制約を厳しく設定した分だけ収穫量が減少するが，それだけ伐採活動が緩慢になる。先に示した成長モデルにこの結果を入れると，当然ながら林分は5年間で伐採直前の元の構造に完全に回復して定常状態が維持される。

第5図は，計画2の最適解にもとづいて森林を取り扱った場合においてha当たり立木本数の推移を示したものである。立木本数の推移を見ると，変動を繰り返しながら，最小の直径階1における立木本数924本/ha，中間の直径階2における立木本数100本/ha，最大の直径階3における立木本数5本/haに収束していく状況を確認できる。この推移のあいだに直径階1からは伐採せず，直径階2から30本/ha，直径階3から1本/haの伐採が恒常的に行われ，最大一定の収穫量が確保できる。

第6図は，計画2の最適解にもとづいて森林を取り扱った場合において直径階別の断面積合計の推移を示したものである。第5図に示した立木本数の変動とともに複雑な変動を示すが，立地の占有に関して，直径階2の重要性が高く，次いで直径階1が重要な位置を占めることを示している。



第5図　直径階別立木本数の推移(計画2)



第6図　直径階別胸高断面積合計の推移(計画2)

摘　要

林木の成長に関する幾つかの経験的知識にもとづいて林分密度の変化や生育期間の経過に伴って林木の成長現象を記述するシステムを成長モデルというが，本稿では，異齢林を対象としたJ.ボンジョルノによる林分成長モデルを使用して，異齢林に関する収穫予定の最適計画策定に関して若干の基礎的考察を加えた。手法的には林分成長モデルと線形計画法による最適化問題との融合であり，異齢林に関する最適収穫の決定問題である。

なお次のような問題を残しているが，これらのことは次の研究課題としたい。1)最適計画の策定における目的を収穫量の最大化としたが，割引純収益の最大化を目的とした計画に関する検討，2)回帰年を5年として固定したが，これを変更する場合の検討［3］，3)林分成長モデルにおける直径階を6～7程度に増やすことの検討，4)線形計画における感度分析およびシャドウプライスの検討等である。

謝　辞

J.ボンジョルノの研究に関して多くの助言を頂き，また欧米における森林計画の研究に関する文献を紹介して頂いた独立行政法人森林総合研究所林業経営部の岡裕泰氏に改めて感謝の意を表する。

引用文献

1) Buongiorino,J. and Gilles,J.K: Managing the Uneven-Aged Forest with Linear Programming; Forest Management and Economics. A Primer in Quantitative Methods. Macmillan Publishing Company, New York(1996) pp.89-107
2) Buongiorino,J. and Michei,B.R.: A Matrix Model of Uneven-Aged Forest Management. Forest Science, 26 (4):609-625(1980)
3) Chang,S.J.:Determination of the optimal growing stock and cutting cycle for uneven-aged stand. Forest Science 27(4):739-744(1981)
4) Davis,L.S. and Johonson,K.N: Growth, Yield and Stand Structure: Concepts for Forest Management: Forest Management(3rd. Edition), McGrow Hill Book Company, New York(1986) pp.40-66
5) Haight,R.G., Brodie, J.D.and Adams, D.M.: Optimizing the sequence of diameter distributions and selection harvests for uneven-aged stand management. Forest Science (2):451-462(1985)