圃場試験法の歴史と課題(5)

堀江正樹

14. 記述統計学から近代統計学へ

長い時間を費やして，圃場試験の方法の進歩の経過を追跡してきたが，すぐれた方法を見出すまでにはいたらないようである。しかし，昨今ごく一般的な方法としてもちいられ，また圃場試験以外の多くの領域にわたって広くもちいられている統計学的な手法についてみながら，さらに先へすすむことにする。

しかし，いざ，あらためて統計学についてみようとしたとき，まず気づくことは，平素統計的方法は言葉として大変気軽に使い，圃場試験やデータの解析に利用しているにかかわらず，意外とその意義と内容についての理解が乏しいのではないか，ということである。また，何等かの解析，検討に適当な統計的方法を使ったからということだけで，何とはなしに安心感をもってしまうのではないかということもある。すなわち，一般的にいって，統計とは，とあらためて問われたときに，直ちに思い出すことは数々の具体的な手法であって，その背景となり，保証を与えている理論的な側面や，それがもつ特徴や注意すべきことまでに思いが及ばないのが通例のことといえるのではなかろうか。したがって，まず統計学とはどういうものか，ごく大雑把にでも理解しておくことが必要ではなかろうかと思う。

そこでまず，近代統計学の創始者といわれる Fisher の最初の成書である“研究者のための統計的方法”[1) から，その大意を引用し，まず一応の大まかな理解をうることにする。Fisher は，「統計学は本来応用数学の一分科であって，観測にもとづく資料を対象とする数学であるとみなすことができる。そこで，われわれは，統計学の論題を3つの異った側面から考察して，同じ型の問題が，どの場合に起るかということを，数学的な言葉でごく簡潔にいい表わしてみる。すなわち，統計学とは(i)集団の研究，(ii)変動の研究，および(iii)資料の簡約に関する研究である，といえる。

統計学は個々のものにかかわる学問ではなくて，それらの個々のものの集まり，すなわち集団についての学問である。たとえば気体運動論，自然淘汰論，化学における質量作用の理論のごときものは，必ずしもその現象を構成する個体自身の性質を論じるものではなくて，個体の集まりの大集団に関する理論である。したがって，これらの理論は元来統計学的な問題なのであって，その統計学的な性格を見失うと誤解を引き起すことになる。量子論も，この事実が今日明らかにされ，きわめて重要視されている」と述べている。彼の詳細な見解は他書にゆずることとして，統計学の立場とそのもつ意味，果たすべき役割を要約すれば以上のことにつきると思う。

ここで，統計学の概要の説明に入る前に，すでに述べた圃場試験にかかわる試験の結果を検討，評価する手段として，Galton, Pearson らにより確立した記述統計学による一つの方法として，確率誤差の利用について，ごく簡単に述べるにとどめ，より深くその特色に触れることを避けてきたが，ここで，さらに一べつしておくことにする。それは，これから Fisher らによる近代統計学への道をたどるには，その基盤と内容の変遷における一つの経過として，記述統計学をさらに見直しておくことが，近代統計学のもつ特色をより理解しやすくし，かつ鮮明にすることができるのではなかろうかと考えられるので，いくばくかの誌面を割いて概観しておくことにする[2)]。

統計学の過去の歴史をたどれば，古くかつその経緯はきわめて複雑であることは，すでにくり返し述べたとおりである。さきにみた Quetelet 以前に，スイスの Jakob Bernoulli によるいわゆる“ベルヌーイの大数法則”の発見は，その源流としてあまりにも有名であるが，さらに1741年にドイツの神学者 Yohan Peter Süssmilch により“人間種族の諸変化における神の秩序”が刊行され，一見しては不明確な法則性も，同種の事象を多数集めることによって，そこに一定の秩序ないし法則性がおぼろげながらも明らかになることを述べ，明確な形式としては示されていないが，これらのことは，集団の構造をみるための統計学的なものの見方についての萌芽とみることができよう。以降，Gauss, Quetelet をへて Galton にいたるが，Galton は誤差法則を適用し，人間の計測まで

Masaki HORIE: History and Problems of Field Experiment (5). 農業技術 40 (6), 1985.

1) Fisher, R.A. (1925): Statistical methods for Research Worker, London.
2) この項は，次の成書に詳しい解説がみられる。中山伊知郎編(1957)：統計学辞典，東洋経済新報社，東京　有沢広巳編(1955)；統計，毎日ライブラリー，毎日新聞社，東京　北川敏男(1959)：統計学の認識，白楊社，東京

拡大し，さらに現代の統計学にかかわる諸問題についての概念を明らかにした。Galton の後継者である Pearson は，それらの概念をそのまま引き継ぎ，それらを数学的に明らかにするとともに，新たな分布や統計量の数理統計学への導入等，その記述統計学への寄与の大きかったことはすでに述べたとおりである。

しかし，この過程での記述統計学は，より以前のいわゆる古典統計学と同様に，現象の記述にのみ主眼があり，それゆえに観察の理論であったといえるが，さらにすすめて，試験や実験に対応するための理論とはなりえなかった。

さらにくり返してその特徴を述べるならば，記述統計学の範ちゅうにある研究の対象としてとりあげられる資料は，Bernoulli の大数法則から明らかなように，無作為に抽出された測定値は，その数が多ければ多いほど，そこからえられた平均値は，それを含む集団の平均値により近づきうる，という理論と立場をとり，同種のものをより多数観察すれば，そこに一つの規則性が現れるとした。その結果，当然のこととしてデータの数を増すことに，まず努力が集中することになる。

一方，数理統計学的な方法がさらに発展し，その適用の範囲が一層広がり，とくに生物学，農学の分野への適用が一般化し，しかも，試験や実験の手法として利用する段階にまでいたると，より多数の標本を必要とする記述統計学の手法では，それらに対応することがいちじるしく困難となってくる。しかし，それが大数法則に依拠するかぎり，何等かの手段によって，データをより少なくし，その少数データをいかに有効，適切に利用するか，ということには思い及ばなかったことは当然のことといえよう。

15. 圃場試験への統計学の接近

記述統計学的方法を試験や実験に適用するようになってきたが，大標本を対象として研究をすすめることができないことが明らかになり，あらためて試験や実験に適用できる適切な方法を見出すことが望まれるようになってきたが，このことについては，すでに述べた Gosset によって，その端緒をつかむことになる。彼はビールの発酵法や，ビール麦の収量等の品種の比較試験の必要から，数理統計学の適用を種種の面でこころみた。しかし発酵の試験では不均一で，かつ変化しやすい原料と，発酵過程が温度等の環境諸要因によっていちじるしく影響されること，また，ビール麦の品種比較試験では，多数品種を一度に比較する場合や，一方では大量の種子を扱うことができない場合とか，いろいろの制約から，大標本の利用を基礎とする Pearson による記述統計学的手法では，それらの適用がいちじるしく制限された。

したがって，少数の標本を有効，適切に利用しうる新たな統計学的方法を考えざるをえなくなり，この方法を実現するために，まず研究の対象となる母集団と，具体的な計測，調査の対象となる標本の区別と，それらの間の関連を実際的な立場から求めることとなり，積極的に研究がすすめられ，のちの t 分布の発見へとつながっていく。

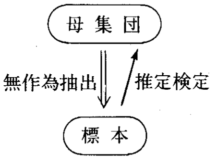
Fisher は1922年に発表した“理論統計学の数学的基礎”で，「統計的方法の目的は，資料を要約することにある」と述べ，「一定量の資料が単なる多数のものの集りであるかぎり，われわれにはとらえにくいものである。したがって，理解をより深めるためには，集団としての全体を正当に代表することのできる，そこからえられるかなり少ない量によっておきかえ，そこから適切な理解をうるようにしなければならない」ことの必要性を強調し，さらに，これを保証するためには「確率は統計的概念の中で，もっとも基本的なものである」とし，前記の問題に接近し，解決を与えるための主たる方法として確率論をとりあげ，その立場にたって問題の解決へと研究をすすめたのである。

すなわち，この目的のために，同じ条件でえられるような仮説的な，無限個の個体から構成される無限母集団を想定し，そして手許にある解析，検討の直接の対象となる現実的な資料は，その無限母集団からまったく無作為に抽出された標本であるとする。ここで母集団から標本を無作為に抽出するということは，母集団を構成するすべての個体が，標本として抽出される機会（確率）をまったく等しくする，ということを保証するための手段としてとったものである。そして，その母集団の分布は何等かの方法によって数学的に表すことができ，また，その分布はいくつかのパラメータ（母数）で特徴づけることができるものとする。そのパラメータは母集団に特有のものであり，もし，何等かの手段によってパラメータの値を知ることができるならば，それ以上特別の知識をうる必要はないことになる。しかし，実際には多数の個体から構成される母集団についてのパラメータの値を，正確に知ることはできないといってよく，われわれがえられるものは，その母集団からえられた標本からの，多少とも不確かな推定値，すなわち母集団の値であるパラメータと区別するために統計量とよばれているものである。もし，標本の属するその母集団の分布についての数学的形式が明らかであり，さらに必要なパラメータに対して，この標本からできるだけ偏りの少ない推定

値がえられるならば，母集団の特性についての説明には，まったく問題はないことになる。

求めた推定値に対して，さらにその誤差の程度と性質を明らかにすることができれば，その価値はいちじるしく増加する。また，あらかじめ母集団の分布が明らかであるならば，標本についての計算の結果，えられる各種の統計量をもちいて，その結果がある仮説に適合するかどうか知るたのの有意差検定を行うことができる。

また，標本からえられたデータの簡約は，母集団の特性にしたがって行うのであるが，一方，母集団の分布が適切に把握されているかどうか検定することも必要となる。これは標本からえられた統計量をもちいて行うことができる。したがって，集団に対する統計学的な考察法は，一つの仮説を想定して，しかも，それを十分厳密に定義して，その仮説の適否を確率的に判定し，その結果にしたがって演繹的に結論を求めるという手順になる。



第1図　母集団と標本の関係

ここで，ある与えられた母集団分布に関して，そこからまったく無作為に抽出した標本の現れる確率を計算することができるばかりでなく，また，その標本から求められる統計量に関する確率も計算できるので，標本分布に関する問題は，事実上確率論の応用であるということができるであろう。

標本分布に関する問題が解ければ，統計学的な観測結果についての有意性の検定や，定量的な推論の基礎として，当初に仮定した分布の妥当性の検定ができるばかりでなく，推定を行う場合にもちいられる統計量のうち，どの統計量を選べばもっとも適切であるか決めるのに役立つことになる。

以上のように Fisher による統計学は，母集団とそこから無作為に抽出された標本を明確に区別するという基本的な立場にたって，それら両者の関係を数学的にいかに正しく認識し，把握するかという研究と技術の開発に集中されたのである。

16. 近代統計学における t 分布の役割と利用

前に述べたように Gosset は，自己の研究を推進する手段として，多数標本をもちいるという立場を離れ，より少数の標本を利用して，いかにして母集団の特性をとらえるかという問題を，統計学的な方法の立場から追求し，その結果，後に Fisher によって t 分布と名付けられた分布を案出したものであるが，この t 分布を，統計学的な考え方と手続きをみるための一事例としてとりあげて，考察してみることにする。

研究対象として，同種の，しかも多数の個体からなる一つの母集団をまず考えることにする。この母集団はある分布型をもっているが，ここでは差し当たって母集団の平均値についてのみ研究の対象とすることにする。この母集団からその一部の個体を完全に無作為に抽出し，それらを標本とする。

母集団の大きさ（母集団を構成する個体の総数）をN，それぞれの個体の測定値を X_i とし，母集団のパラメータとしての母平均を μ，母分散を σ とすると，それぞれ，

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,N)$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}$$

と定義される。ここで，Nが無限大，すなわち，無限母集団についても理論上この定義は適用され，とくに母集団が正規分布注1)するときは，設定されたある2つの値の間の測定値をもつ全個数の，母集団を構成する総数に対する割合は計算によって求めることができる。

ここで，とくに分布型については問わないで，母集団のパラメータ μ と σ^2 が明らかになっているときは，その母集団から無作為に抽出された標本は，標本の大きさを n_i，各個体の測定値を x_i としたとき，標本平均値 $\bar{x}$ は，

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

となる。ここで，同じ母集団からこのような n 個からなる無作為標本を，くり返し，しかも無限回それぞれまったく独立に抽出した場合，そこには新たに平均値が μ，分散が σ^2/n の無限集団（抽象的な）を構成することができる。このことは，もとの母集団の分布型がどうであろうとも，無作為に抽出された標本であるかぎり，n が十分に大きければ，標本平均値の無限集団の分布型は限りなく正規分布に近づくことが，すでに知られている。

このように正規分布する母集団から，大きさ n の無作為に標本を抽出して，その標本平均値 $\bar{x}$ をもってパラメータを推定する場合に，推定誤差，すなわち標本平均値 $\bar{x}$ とパラメータ μ との間の差，$\bar{x}-\mu$ は平均値0で，分散 σ^2/n なる正規分布［$N(0,\ \sigma^2/n)$ と書く］をする母集団から無作為に抽出した，一つの個体の測定値と考えることができる。以上のように，無作為標本の平均値は，母集団が正規分布する場合に，母集団の平均値 μ を推定することができるが，このことは，さらにいえば母集団

の分散 σ^2 がすでに知られているときにのみ厳密に成り立つのである。しかし，多くの場合に母集団の分散は知られておらず，Pearson の記述統計学の段階では，標本からえられた分散が，母集団からえられた分散と同じである，とみなして利用していたのである。

Gosset は，正規分布する母集団（正規母集団という）から無作為に抽出された標本の，標本標準偏差の分布をみいだして，その分布をもととして，さらに無作為標本の平均値 $\bar{x}$ と母平均 μ との差を，その標本平均値の標準偏差 $s/\sqrt{n}$ で割った量の分布曲線をえた（同一母集団に対し同じ行為を無限回くり返すことによりえられる)。この分布曲線が正しい場合には，標本平均値 $\bar{x}$ も，標本標準偏差 s も，すべて標本からえられるので，この分布曲線を利用することによって，母集団の平均値 μ の推定を確率的に行うことができることになる。この曲線が現在 t 分布[注2)]とよばれているものである。

すなわち，母平均 μ（ただし母分散は未知）の正規母集団から，無作為に抽出した大きさ n の標本の測定値 x_i が明らかであるときは，その標本の平均値 $\bar{x}$ と，分散 s^2 は

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

となり，ここで $n-1$ は自由度[注3)]とよばれるものである。

ここで,

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

とすれば，この t は t 分布する。この t 分布の形は n の大きさによって変化し，無限大のとき正規分布することが知られている。

ここで，t 分布の関数を $f(t)$ としたとき，ある特定の値 a を決めれば，t が a より大きい値を，無作為に抽出された標本からえられる確率は，n の値に対応して，

$$\int_a^{\infty} f(t)dt$$

によって求められる。このようにして，標本による n と s^2 が明らかにできる場合には，標本平均値 $\bar{x}$ によって母平均 μ を推定したとき，のちにのべる有意差検定や推定を確率論的に行うことができる。

以上かなりの頁を削いて t 分布を例として，統計学的な基本的な考え方を縞々と述べてきたように，標本に関する知識のみに基づいて，もとの母集団の平均値の推定が，数学的，とくに確率をもととして可能になったということは，前からくり返し述べているように，母集団と標本との明確な区別と，その相互の関連が完全に意識されたと同時に，その区別と関連についての知識をもととして利用する，具体的な統計学的な方法をみいだしたことを意味している。

ここでは統計学的な考え方とその基礎的な裏付けを，t 分布を一つの事例としてとりあげて説明することにとどめたが，その後 Fisher によりまったく同じ考え方にしたがって，F 分布，χ^2 分布あるいは相関係数等と，さまざまな統計量について小標本によるとり扱い方と，その方法が開発され，またさらに論理的に整理されていくのである。

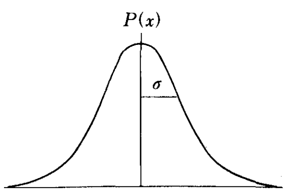
このように標本を基礎として母集団の特性を知る方法が確立していくにしたがって，Pearson により集大成された記述的な数理統計学は，試験や実験の場で大きな変革をうけることになったのである。

注１；正規分布について　これまでにのべたように統計学は集団を対象とする。集団はある特性についてある分布型を示すものである。われわれが対象とする集団，とくに統計学の領域で主たる対象となる分布は正規分布であって，この分布はすでに述べたように Gauss によってみいだされたものである。

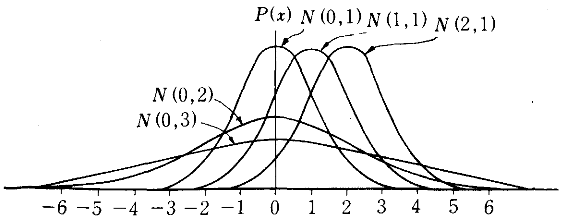
母平均 μ，母標準偏差 σ である正規分布はつぎの関数によって示される。

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

ここで π は円周率，e は自然対数の底2.7183である。関数から明らかなように正規分布は μ と σ によって形がきまり，μ は分布の位置，σ は μ から変曲点までの距離で，分布の広がりの程度を示す（第２図)。たとえば，$N(0,1)$，$N(1,1)$，$N(2,1)$，$N(0,2)$ および $N(0,3)$ の各正規分布を示すと第３図の



第２図　正規分布



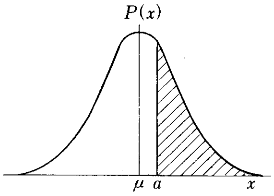
第３図　μ と σ が種々の値をとったときの正規分布

とおりで，この図から正規分布のμとσとの相互の関連が理解できるであろう。

また，ある数値a以上の値をとる部分の面積（第4図）は

$$\int_a^{+\infty} P(x)dx$$

で表され，累積正規分布という。



第4図　$\int_a^{+\infty} P(x)dx$ のしめる面積

ここで，

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

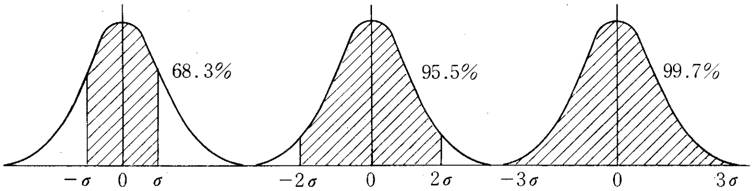
とおくと，

$$P(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

となり，この関数は標準化された正規分布といい，もとがどのような形の正規分布でも，標準化することによって平均値0，分散1の正規分布$N(0,1)$となる。ここでは

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u)du=1$$

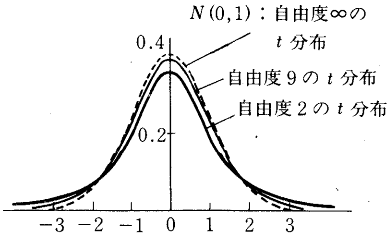
となり，それぞれの大きさの標準偏差を範囲としたときの面積のしめる割合は第5図のようになる。



第5図　標準正規分布におけるσとそのしめる面積の割合

注2；t分布について　t分布はつぎの関数（確率密度関数という）で示される。

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{n-1}\,B\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}$$



第6図　t分布

ここで，Bはベータ関数を意味している。t分布は0を中心として左右対象である。その分布の形は標準正規分布と非常によく似ているが，中央がいくらかとがり，両端は長く裾を引き±無限大の範囲をとる。自由度のちがいによる分布の変化は第6図のとおりである。

注3；自由度について　統計学では自由度という言葉がついてまわる。数学的にも説明できるが，ここでは煩雑さを避けて，一般によく使われるごくありふれた説明をするにとどめる。

母集団からn個の標本をとるときに，各個体の抽出に際しては，各個体がまったく独立であるから，$n-1$個の個体の値が分かっても，残りの1個の値は不明である。このことをn個の自由度があるという。

そこでn個の個体から母分散σ^2を推定するとき，もし母平均μが既に分かっていれば，それをもちいることができるので自由度はnでよいことになる。しかし，μが不明のときは標本平均値$\bar{x}$をもちいることになる。このときは，$\bar{x}$が分かっていれば，$n-1$個の値が分かれば，残りの1個の値は必然的に決まってしまう。つまり$\bar{x}$を求めるために自由度が1個使われてしまったので，nの代わりに$n-1$をもちいることになる。

また，一般にnが小さいとき，分散を求めるのにnで割ると，σ^2を過小評価する機会が多く，$n-1$で割るとより適切な推定値がえられることが，経験的に知られている。

（農業環境技術研究所環境管理部計測情報科長）